MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI

DR. FAZEKAS FERENC

A. IX.
VEKTORALGEBRA
LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

ÍRTA:

DR. FAZEKAS FERENC

DR. KÖRMENDI ISTVÁN

TASNÁDY ISTVÁN †

Negyedik, bővített kiadás

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

1967

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

Szerkeszti
DR. FAZEKAS FERENC
egyetemi docens

Belső munkatársak
DR. FREY TAMÁS
egyetemi docens, kandidátus
DR. BAJCSAY PÁL
egyetemi docens, kandidátus

Szemléltetés
GYURCSY ENDRE
okl. villamosmérnök

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST 1967

A MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika *(Negyedik kiadás)*
A. II. Egyváltozós elemi függvények *(Harmadik kiadás)*
A. III. Differenciálszámítás *(Harmadik kiadás)*
A. IV. Határozatlan integrál *(Harmadik kiadás)*
A. V*. Határozott integrál (Első rész) *(Második kiadás)*
A. V**. Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk *(Második kiadás)*
A. VII. Többváltozós függvények integrálása *(Második kiadás)*
A. VIII. Taylor-sorok *(Harmadik kiadás)*
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek *(Negyedik kiadás)*
A. X. A logarléc *(Negyedik kiadás)*

B.

B. I., II., III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája) Skalár-, vektor- és tenzormezők *(Harmadik kiadás)*
B. IV. Komplex függvénytan *(Harmadik kiadás)*
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek *(Második kiadás)*
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok *(Második kiadás)*
B. VII*. Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) *(Harmadik kiadás)*
B. VII**. Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények *(Második kiadás)*
C. II. Variációszámítás *(Második kiadás)*
C. III. Integrálegyenletek
C. IV. Matrixszámítás *(Harmadik kiadás)*
C. V. Valószínűségszámítás *(Második kiadás)*
C. VI. Matematikai összefoglaló *(Negyedik kiadás)*
C. VII. Matematikai programozás *(Második kiadás)*

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk)

A. IX.
VEKTORALGEBRA
LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Írta

DR. FAZEKAS FERENC
egyetemi docens

DR. KÖRMENDI ISTVÁN
egyetemi docens

TASNÁDY ISTVÁN †
középiskolai tanár

Negyedik, bővített kiadás

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Kiadását a művelődésügyi miniszter rendelte el

A kötet kéziratát átnézte:

DR. BÁLINT ELEMÉR
egyetemi docens

DR. GALLAI TIBOR
egyetemi tanár

Korrigálta:

SZABÓ ISTVÁN
egyetemi tanársegéd

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő,

---

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 4. oldalon!

hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk*. Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő a gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A szerkesztő

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve — az eredeti terv szerint sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi nemzetközi mérnöki matematikai kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom

tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A szerkesztő

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mind inkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV., B. I-II-III., B. VII.

Az utóbbi második kiadások egy éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével, a héjelmélet modern, tenzorszámítási tárgyalásmódjával kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítés helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumokon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi, nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének korszerűsítésének nagy munkáját, továbbra is kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk áldozatkész, buzdító támogatását.

Budapest, 1964. júl. 15.

A szerkesztő

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

E kötet elsősorban műszaki egyetemi hallgatók matematikai gyakorlataihoz kíván anyagot szolgáltatni, ezért megírásánál a didaktika szempontjait helyeztük előtérbe.

Jó vektoralgebrai példaanyagot összegyűjteni nem könnyű feladat; még nehezebb azonban az elsőéves átlaghallgatóságot — akiknek a témakör új és meglehetősen idegenszerű — e feladatok megoldásának technikájára megtanítani. Úgy véljük, hogy ezt a célt nem annyira a példák sokaságával, hanem inkább jól kiválasztott, jellegzetes, fokozatosan nehezebb és nehezebb feladatok részletes kidolgozásával, a megoldás egyes lépéseinek tudatosításával, jó ábrákkal, az érdeklődést felkeltő és ébrentartó szép problémák bemutatásával közelíthetjük meg: munkánkban erre törekedtünk. Tekintettel voltunk a tehetségesebb és igényesebb hallgatókra is; az ő részükre szánt feladatokat csillaggal jelöltük meg.

A kiválasztott példáknak mintegy felét oktatói munkánkban felhasznált, legnagyobbrészt eredeti anyagunkból vettük; az idézett forrásmunkák közül főleg Dubnov kiváló műveiből merítettünk. Egyébként az átvett feladatok egy részét — didaktikai célkitűzéseink szerint — át is alakítottuk (kivált a 3. §-ban).

A lineáris egyenletrendszereket csak vázlatosan tárgyaltuk; ezt az indokolja, hogy erről a témáról a sorozat egyes köteteiben — más szemszögből — részint már volt (A. I.), részint még lesz (B. VIII.) szó.

Köszönetünket fejezzük ki dr. Bálint Elemér egyetemi tanszékvezető docensnek és dr. Gallai Tibor egyetemi tanárnak, akik a kézirat átnézése során értékes tanácsaikkal, építő bírálatukkal hozzájárultak a kötet színvonalának emeléséhez.

Köszönet illeti az Egyetemi Nyomdát, főleg a Juhász-brigád dolgozóit is, akik lelkes és színvonalas munkával valósították meg a kötet magas nyomdai követelményeit.

Budapest, 1954. március 1.

A SZERZŐK

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Sorozatunk második kiadásának megindulása után az elsők között került sor e kötet jelen, második kiadására, amelyet itt az olvasó szíves figyelmébe ajánlunk. E tényt főleg az a körülmény magyarázza, hogy műszaki felsőoktatásunk és tudományunk elméleti igényességének fejlődésével, korszerűsödésével párhuzamosan mind nagyobb jelentőséget nyert számukra a vektoralgebra (és a reá támaszkodó vektoranalízis) modern és rendkívül szemléletes segédeszköze. A műegyetemi oktatási gyakorlat azt is megmutatta, hogy nem volt hiábavaló az első kiadásban a szerzők tudatos didaktikai erőfeszítése sem. Egyébként, a műszaki életünkben időközben mindinkább előretörő gazdaságossági, tudományos tervezési igények háromdimenziós vektoralgebránknak a magasabb dimenziók irányába való továbbfejlesztését is időszerűvé tették.

A fenti körülmények egyúttal megszabták a kötet második kiadásával kapcsolatos szerzői teendőket is. Nevezetesen a Tasnády István által írt 1., 2. és 4. §-ban, valamint a Körmendy Istvánnal együtt írt 3. §-ban elegendőnek látszott az időközben észrevett apróbb sajtóhibák kiigazítása. Másrészt — függelék jelleggel — egy új, 5. § is beiktatásra került. Ezt az n-dimenziós vektoralgebráról, részletesebben pedig az ún. lineáris és euklidesi terekről szóló fejezetet a sorozat Vektoranalízis c. kötetének szerzője, Fazekas Ferenc írta. Ez az új fejezet, a sorozat Mátrixszámítás c. kötetének mátrixalgebrai részével együtt megadja az igényesebb műszaki olvasónak a modern tudományos tervezés, főleg az ún. lineáris programozás tanulmányozásához szükséges matematikai eszközöket. Éppen ezért ezt az új részt — az érdeklődő hallgatókon és tudományos diákkörökön kívül — bizonyára a szakmérnökhallgatók és a gyakorló mérnökök is haszonnal fogják forgatni. Ilyen körül-

mények között az 5. §-ban a szerző némileg szabadabb tárgyalásmódot is megengedhetett magának.

Természetesen, az új fejezet szerény keretei között nem kerülhetett sor a lineáris és egyéb fajta programozás változatos és nem éppen egyszerű feladatainak, elméletének, módszereinek, gyakorlati alkalmazásainak kifejtésére; ezt valamely (C- vagy B-) részbeli kötet (lehetőleg C. I. kötet) második kiadásában szándékozik beiktatni a szerkesztőség. Szeretnők remélni, hogy e műszaki-gazdasági rendeltetésű bővítések eredményesen szolgálják majd a szerkesztőségnek a sorozat állandó fejlesztésére és korszerűsítésére irányuló törekvéseit!

Végezetül köszönetet mondunk a Tankönyvkiadó Vállalatnak e kötet második, bővített kiadásának megjelentetéséért, nemkülönben Seitz Károly alkalmazott matematikusnak a bővítéshez fűzött hasznos észrevételeiért.

Budapest, 1962. június 15-én

A SZERZŐK

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK KIADÁSÁHOZ

A jelen harmadik kiadás a másodiktól csupán néhány apró helyreigazításban különbözik.

Budapest, 1963. november 15-én

A SZERZŐK

ELŐSZÓ A KÖTET NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

Az új kiadás, mely lényegében megegyezik az előző kettővel, fokmérője a közönséges (3 dimenziós) és az általános (n dimenziós) vektoralgebra iránt a műszaki-gazdasági élet részéről megnyilvánuló növekvő érdeklődésnek.

Megelégedéssel figyeljük ezt az érdeklődést, annál is inkább, mert — észlelésünk szerint — a műszaki-gazdasági felsőoktatás és szakirodalom még távolról sem aknázta ki e szép diszciplína gazdag lehetőségeit.

Az alkalmazások szükségletei egyébként felvetették újabb bővítés gondolatát (pl. a konvex poliéderek, szimplexek stb. tekintetében). A sorozatfejlesztés programjában bizonyára ezt is, mint az eddigi szépszámú korszerűsítéseket, rövidesen meg tudjuk valósítani.

E kiadást időközben elhunyt szerzőtársunk, *Tasnády István* emlékének ajánljuk.

Dr. Fazekas Ferenc
Dr. Körmendi István

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

ELSŐ RÉSZ

MÁSODIK RÉSZ

HARMADIK RÉSZ (FÜGGELÉK)

(A *-gal megjelölt részek *első olvasásban* kihagyhatók!)

ELSŐ RÉSZ

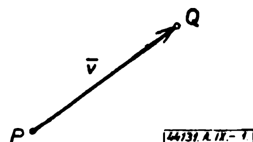
1. §. A VEKTORALGEBRA ALAPFOGALMAI ÉS TÉTELEI. GEOMETRIAI ÉS EGYÉB FELADATOK VEKTORALGEBRAI MEGOLDÁSA DIREKT ÚTON (KOORDINÁTÁK NÉLKÜL)

a) A vektor fogalma

Legyen P és Q a tér két különböző pontja. A P-ből Q-ba mutató irányított egyenesdarab *vektormennyiség;* ezt a vektormennyiséget a PQ egyenesdarab hossza *(nagysága)* térbeli helyzete *(állása)* és iránya *(értelme)* határozzák meg. (Az „irány" vagy „értelem" azt jelenti, hogy a vektor P-ből Q felé mutat és nem megfordítva.) Jele: $\overrightarrow{PQ}$ vagy $\boldsymbol{v}$.*

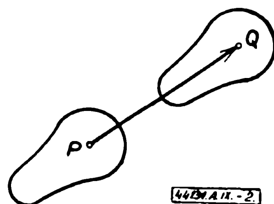
A vektor hosszának mértékszáma a vektor abszolút értéke. Jele:

$$|\boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{PQ}|.$$



1. ábra

Ha valamely merev testet önmagával párhuzamosan eltolunk (vagyis a test *transzlációt* végez), akkor a merev test valamennyi pontja ugyanakkora és ugyanolyan irányú elmozdulást végez. A transzlációt azzal adjuk meg, hogy kiszemelvén a test egy tetszőleges P pontját, megmondjuk, hogy ez a transzláció befejeztekor a tér melyik Q pontjába jutott. Nyilvánvaló, hogy az eltolást a $\overrightarrow{PQ}$ vektor teljesen meghatározza.



2. ábra

A transzlációt tehát vektorral jellemezhetjük. Hasonlóképpen vektor minden olyan mennyiség, amely a transzlációvektorra egyértelműen leképezhető.

A vektorok jellege fizikai jelentésük szerint különbözik.

Szabad vektor az a vektor, melynek kezdőpontja — a vektor támadási pontja — a tér bármely pontjába helyezhető. Ilyen vektor a transzláció, vagy pl. a merev testre ható forgatónyomaték vektora.

A *kötött vektor* kezdő — támadási — pontja a tér valamely meghatározott pontja. Így pl. valamely elektrosztatikus erőtér térerősségvektora egy pontban éppen ahhoz a ponthoz tartozik, tehát kötött vektor. Hasonlóképpen kötött vektor a rugalmas testre ható erő.

Vannak vektorok, melyek hatásvonaluk mentén eltolhatók. Ilyen vektor a merev testre ható erő: ennek támadási pontja — a merev testre gyakorolt pillanatnyi hatás

---

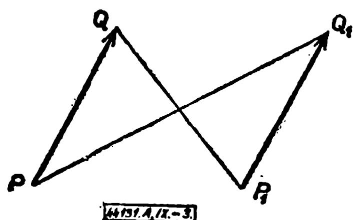
* Itt jegyezzük meg, hogy az *ábrákon* az *egy betűvel* megnevezett vektorokat — nyomdatechnikai okokból — a betű fölé helyezett *vonással* jelezzük, tehát pl. $\bar{v}$, $\bar{a}$ stb.

szempontjából tekintve — tetszés szerint eltolható, de csak az erő irányában (a hatásvonalon).

A következőkben általában szabad vektorokkal foglalkozunk.

A vektorokat nagyságuk, állásuk és irányuk (értelmük) jellemzik. Mivel minden vektorhoz hozzárendelhető egy (a nagyságot kifejező pozitív valós) szám, a vektorok mennyiségjelleggel bírnak; a vektorok azonban — állásuk és irányuk is lévén — különböznek az iránnyal nem rendelkező, ún. *skalármennyiségektől*, ezért definiálni kell a vektorok egyenlőségét és a velük való műveleteket.

Két vektor egyenlő, ha közös támadáspontból felrajzolva, végpontjuk egybeesik. Ez a $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{P_1Q_1}$ vektorokra akkor és csak akkor következik be, ha a PQ_1 és P_1Q egyenesdarabok metszik és felezik egymást.

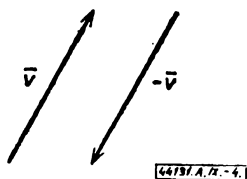


3. ábra

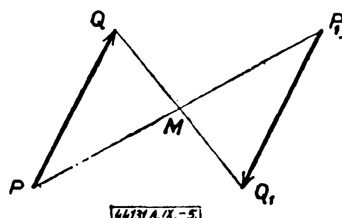
Zérusvektor az a vektor, melynek nagysága (hossza) zérus; iránya határozatlan; jelölése: ***0***.

A nagyobb, illetve kisebb ($\gtrless$) vonatkozásnak vektorok között nincs értelme. Van értelme azonban a vektorok nagysága (abszolút értéke) között, hiszen azok pozitív valós számok.

Önmagában nincs értelme a vektorok között az előjelnek sem. A — jelet csak az irány viszonylagosságának jelzésére használjuk: így a $-\mathbf{v}$ vektor olyan vektor, amely a $\mathbf{v}$ vektorral egyenlő nagy, egyirányú (párhuzamos) és ellenkező állású. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{P_1Q_1}$ akkor és csak akkor, ha a PP_1 és QQ_1 egyenesdarabok metszik és felezik egymást.



4. ábra



5. ábra

A vektorok nagyságát (hosszát, abszolút értékét) mindig pozitív szám fejezi ki, így a $-\mathbf{v}$ vektor nagyságát is pozitív szám jellemzi!

A vektoraritmetikában a következő műveleteket definiáljuk a vektorokra: összeadás, kivonás, számmal (skalárral) való szorzás, két vektor skalárszorzata, két vektor vektoriális szorzata. Külön kiemeljük, hogy vektornak vektorral való osztása nincs értelmezve. Az egyes műveletekkel az alábbiakban foglalkozunk.

b) Vektorok összeadása

Az összeadás definiálását szemléletessé tehetjük a transzláció-vektorral.

Végezzen a merev test előbb $\mathbf{v}_1$, utána $\mathbf{v}_2$ transzlációt (elég a test egy pontjával foglalkozni). Így a test kiszemelt P pontja előbb Q-ba, majd R-be jut; ha a test rögtön a $\overrightarrow{PR}$ vektorral jellemzett elmozdulást végezte volna, akkor egy elmozdulással jutott volna abba a helyzetbe, melybe különben a $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{QR}$ elmozdulások egymásutánja viszi.

A $\overrightarrow{PR}$ elmozdulás a $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{QR}$ elmozdulások eredője, összege. Jelben:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR},$$

illetőleg

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}.$$

Az is nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{v}$ az eredő elmozdulás akkor is, ha a test előbb a $\boldsymbol{v}_2$ és utána a $\boldsymbol{v}_1$ elmozdulást végzi:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1,$$

vagyis az elmozdulások összeadása kommutatív.

6. ábra

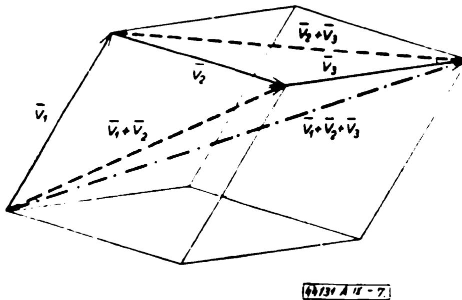
E minta nyomán természetes bármely *két vektor összegét* úgy definiálni, hogy az egyik összeadandó végpontjához illesztjük a másik kezdőpontját és az eredő vektor az első összeadandó kezdőpontjából a második végpontjába mutat.

Az összeadás asszociatív:

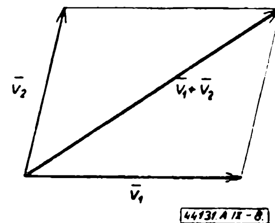
$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3.$$

Az igazolás egyszerűen leolvasható az ábrából.

Nyilvánvaló, hogy a $\boldsymbol{v}$ és $-\boldsymbol{v}$ vektorok összege zérusvektor.



7. ábra



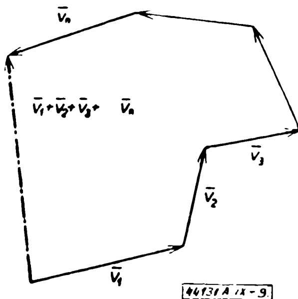
8. ábra

Két vektor összege úgy is nyerhető, hogy a vektorokat egy pontból felrajzolva parallelogrammát szerkesztünk. A két vektor összegét a parallelogrammának az az átlóvektora adja, melynek támadáspontja az összeadandó vektorok támadáspontjával egyezik *(parallelogramma-tétel)*.

Több vektor összegét az ún. *vektorpoligon* megszerkesztésével nyerhetjük.

A $\boldsymbol{v}_1$ vektor végpontja legyen a $\boldsymbol{v}_2$ vektor kezdőpontja, a $\boldsymbol{v}_2$ vektor végpontja a $\boldsymbol{v}_3$ vektor kezdőpontja és így tovább: az így egymáshoz fűzött vektorok alkotják a vektorpoligont.

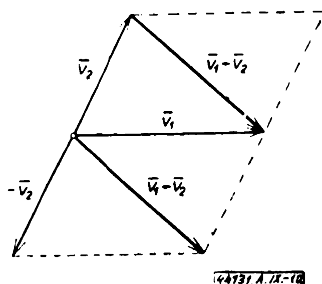
Ennek *záró oldala* adja meg az összeget (eredőt), mely az első vektor kezdőpontjából az utolsó végpontjába mutat.



9. ábra

c) Vektorok különbsége

A $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ vektorok *különbségét* úgy definiáljuk, mint a $\boldsymbol{v}_1$ és $-\boldsymbol{v}_2$ vektorok összegét. A $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ vektorokat egy pontból felrajzolva a különbségvektort az a vektor adja, mely a kivonandó vektor végpontjából a kisebbítendő vektor végpontjába mutat.



10. ábra

d) Vektor szorzása számmal (skalárral)

Az

$$m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$$

olyan vektor, melynek abszolút értéke:

$$|\boldsymbol{w}| = |m| \cdot |\boldsymbol{v}|;$$

$\boldsymbol{w}$ állása egyezik $\boldsymbol{v}$ állásával (párhuzamosak); $\boldsymbol{w}$ iránya aszerint egyező vagy ellenkező $\boldsymbol{v}$ irányával, amint m pozitív vagy negatív. Jelben:

$$\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{v} \uparrow\, \uparrow \boldsymbol{v}, \quad \text{ha} \quad m > 0,$$

$$\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{v} \uparrow\, \downarrow \boldsymbol{v}, \quad \text{ha} \quad m < 0.$$

Vektornak számmal való szorzása a vektor *nyújtását* ($|m| > 1$), *illetve zsugorítását* ($|m| < 1$) és ezenkívül esetleg állásának ellenkezőre változását ($m < 0$) jelenti. Ha $m = 0$, a szorzás zérusvektort eredményez. A számmal való szorzás disztributív, azaz $m \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}$.

e) Két vektor skaláris szorzata

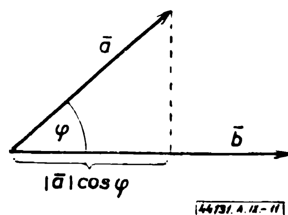
Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok *skaláris szorzatán* (jelölése: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, vagy $\boldsymbol{ab}$) a következőt értjük:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi,$$

vagyis a tényezővektorok abszolút értékeinek szorzatát megszorozzuk a közbezárt szög cosinusával.

(Két vektor által bezárt szög az a π-nél nem nagyobb pozitív szög, amely a közös kezdőpontból megrajzolt vektorok között van. Jelölése: $\varphi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$).

Két vektor skaláris szorzata valós számot, skalárt eredményez. A definícióból következik, hogy



11. ábra

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba},$$

tehát a skaláris szorzás kommutatív.

De az is következik a definícióból, hogy — valós számok szorzatával ellentétben — *vektorok skaláris szorzata zérus lehet anélkül, hogy valamelyik tényező is zérusvektor lenne.* Ha ugyanis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, akkor a szorzat zérus, noha $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| > 0$. A skaláris szorzat zérus vagy nem zérus aszerint, amint a két vektor merőleges egymásra vagy nem. (Ez az állítás akkor is fenntartható, ha az egyik tényező zérusvektor. A zérusvektor ugyanis határozatlan irányú, tehát tetszőleges irányú.)

A skalárszorzásra az asszociativitás a következő vonatkozásban érvényes:

$$m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(m\boldsymbol{b}).$$

Érvényesül végül a skalárszorzásra a disztributivitás is:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

Ugyanis részletesen kiírva

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\varphi_1+|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\varphi_2$$

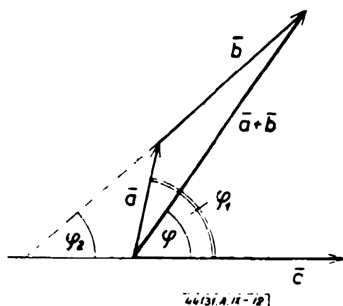
és $|\boldsymbol{c}|$-vel egyszerűsítve, valamint az

$$|\boldsymbol{a}|=a,\quad |\boldsymbol{b}|=b,\quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=s$$

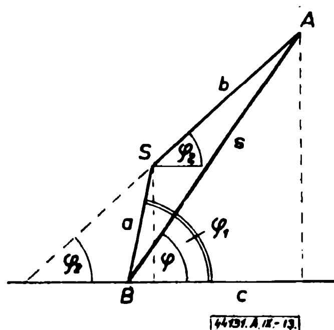
jelöléssel az

$$s\cdot\cos\varphi=a\cdot\cos\varphi_1+b\cdot\cos\varphi_2$$

egyenlőségre jutunk. Ennek szemléletes tartalma egysíkú vektorokra (l. a 12—13. ábrát):



12. ábra



13. ábra

Az ABS háromszög s oldalának a c egyenesre való merőleges vetülete akkora, mint az a és b oldalak vetületeinek összege. A skalárszorzás disztributivitása ekvivalens tehát a vetületi tétellel, így igaz. A tétel nem egysíkú vektorokra is egyszerűen igazolható.

A disztributív tulajdonságból folyik, hogy a többtagúakat éppen úgy tagonként szorozzuk skalárisan, mint a valós számokat:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bd}.$$

Valós számokból akárhány tényezős szorzatot képezhetünk, ezzel szemben vektorok skaláris szorzata csak két vektor között értelmezhető.

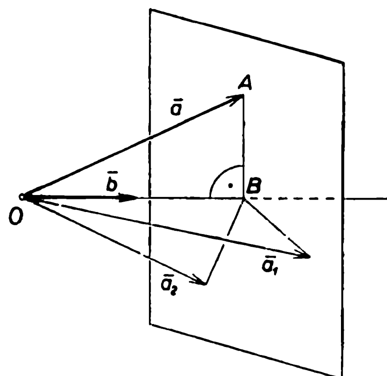
További lényeges különbség a valós számok aritmetikájával szemben, hogy a skaláris szorzat értékének és az egyik tényezővektornak ismeretében nem lehet egyértelműen meghatározni a másik tényezővektort. Ha ugyanis találtunk egy olyan $\boldsymbol{a}$ vektort, melynek $\boldsymbol{b}$-vel való skaláris szorzata s:

$$\boldsymbol{ab}=s,$$

akkor egyúttal

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}=\ldots=s,$$

ahol $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ olyan vektorok, amelyeknek kezdőpontja 0-ban, végpontja pedig a $\boldsymbol{b}$ hatásvonalára B-ben emelt merőleges síkon van (l. a 14. ábrát).



14. ábra

A skaláris szorzás módot ad arra, hogy vektorok között *metrikus vonatkozásokat* állapítsunk meg.

Vektor abszolút értéke: szorozzuk $\boldsymbol{a}$-t önmagával skalárisan

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2,$$

következőleg

$$|\boldsymbol{a}| = \underset{+}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}}.$$

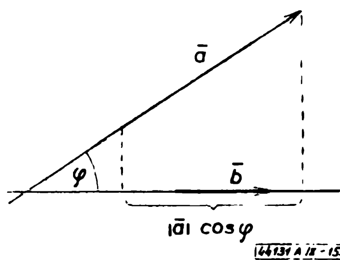
Egységvektor: minden olyan vektor, melynek abszolút értéke 1. Egységvektornak önmagával való skaláris szorzata 1:

$$\boldsymbol{e}^2 = |\boldsymbol{e}|^2 = 1.$$

Adott vektor irányába mutató egységvektor: ha $\boldsymbol{a}$ tetszőleges (de nem zérus) vektor, vagyis

$$|\boldsymbol{a}| \neq 0,$$

akkor $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ olyan egységvektor, mely $\boldsymbol{a}$-val párhuzamos és egyirányú.



15. ábra

Vetület: $\boldsymbol{a}$ vektornak $\boldsymbol{b}$ irányára való merőleges vetülete a következőképpen adódik:

$$\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos \varphi.$$

$\frac{|\boldsymbol{b}|}{\boldsymbol{b}}$ az előbbiek szerint a $\boldsymbol{b}$-vel egyirányú egységvektor. A vetület előjeles szám: pozitív, ha az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ által bezárt φ szög hegyesszög; negatív, ha φ tompaszög.

Vektorok hajlásszöge: legyenek $\boldsymbol{e}_1$ és $\boldsymbol{e}_2$ egységvektorok, melyeknek hajlásszöge φ. Ezeknek skalárszorzata

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = |\boldsymbol{e}_1| \cdot |\boldsymbol{e}_2| \cdot \cos \varphi = \cos \varphi.$$

Ha $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ tetszőleges vektorok, akkor hajlásszögükre nézve

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \cos \varphi.$$

f) Két vektor vektoriális szorzata

Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok *vektoriális szorzata* az a $\boldsymbol{c}$ vektor, amelynek abszolút értéke az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok által meghatározott parallelogramma területének mérőszámával egyenlő, iránya pedig merőleges e parallelogramma síkjára olyképpen, hogy $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, és $\boldsymbol{c}$ úgy következnek egymásra, mint a jobb kéz hüvelyk, mutató és középső ujja. A vektoriális szorzat jele:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad \text{(Olvasandó: „a kereszt } b\text{”).}$$

Abszolút értéke:

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \varphi.$$

A vektoriális szorzatnak még a következő szemléletes értelmezés is adható:

$\boldsymbol{b}$-t bontsuk fel két olyan vektor (komponensek) összegére, melyek egyike merőleges $\boldsymbol{a}$-ra, a másik $\boldsymbol{a}$-val párhuzamos. Az $\boldsymbol{a}$-ra merőleges komponenst $\boldsymbol{a}$-val szembe-

nézve, az óramutató járásával ellentétes irányba forgassuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az $\boldsymbol{a}$ mint tengely körül. Ha $|\boldsymbol{a}| = 1$, akkor az így nyert vektor máris $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$-t adja; ha $|\boldsymbol{a}| \neq 1$, akkor a fenti módon nyert vektort még meg kell szorozni az $|\boldsymbol{a}|$ skalárral.

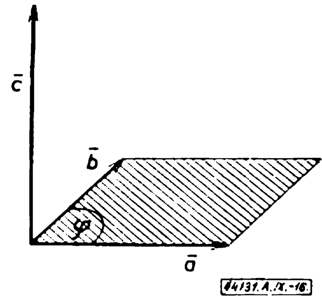
Vektoriális szorzatnak skalárral való szorzására érvényes:

$$m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b}).$$

A vektoriális szorzásra is érvényes a disztributív törvény:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

Ennek igazolása pl. a vektoriális szorzás előbb adott szemléletes értelmezésével történhetik. A disztributivitásból következik a többtagúak vektoriális szorzásának — a valós számok szorzásához hasonló — szabálya is:



16. ábra

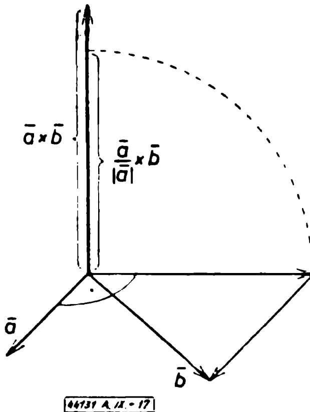
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}.$$

A vektoriális szorzás azonban nem kommutatív, hanem alternáló:

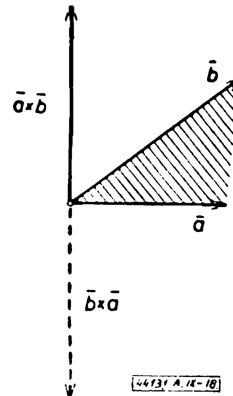
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},$$

vagyis a tényezők sorrendjének felcserélése előjelváltozással jár.

A vektoriális szorzásnak sincs egyértelmű megfordítása, vagyis a szorzatvektor és



17. ábra



18. ábra

egyik tényezővektor ismeretében a másik tényezővektort nem lehet egyértelműen meghatározni (l. a 19. ábrát).

$$OB = |\boldsymbol{b}_i| \cdot \sin\varphi_i \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

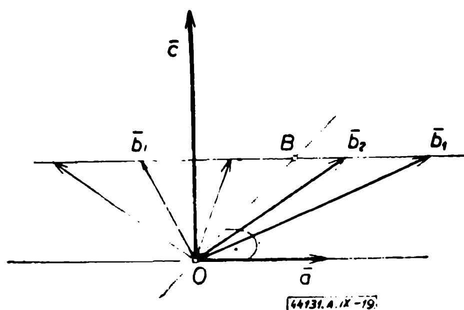
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_i.$$

A vektoriális szorzat zérus lehet akkor is, ha egyik tényezője sem zérusvektor. Ha ugyanis $\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$, akkor a közbezárt szög 0, vagy π, tehát a szorzatvektor zérusvektor. Két vektor *párhuzamosságának* tehát az a feltétele, hogy

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

legyen. (Ha pl. $|\boldsymbol{a}| = 0$, akkor is párhuzamosnak mondjuk $\boldsymbol{a}$-t és $\boldsymbol{b}$-t, ugyanis a zérusvektor iránya határozatlan, így tekinthető bármely vektorral párhuzamosnak is.)

A vektoriális szorzás *ismételhető* a következő értelemben:



19. ábra

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \text{ stb.}$$

Ez a szorzás azonban nem asszociatív, vagyis a zárójel nem helyezhető el másképpen:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}.$$

Egyszerű példa meggyőzhet erről. Legyen ugyanis $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; ekkor a bal oldal zérusvektor, a jobb oldal azonban nem. E hármas szorzatra még visszatérünk.

g) Vektorok lineáris függetlensége

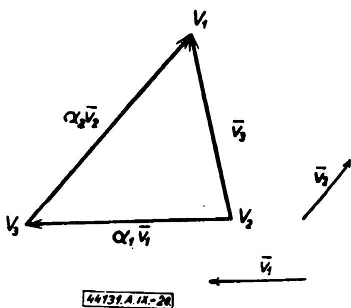
A $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha az

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = 0$$

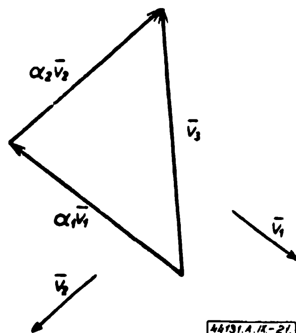
kapcsolat csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ esetén áll fenn, azaz ha

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n| = 0.$$

Két dimenziós térben (síkban) kettőnél több lineárisan független vektor nincsen. Ha ugyanis két egysíkban fekvő vektor: $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ már lineárisan függetlenek (nem párhuzamosak), akkor bármely a $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ síkjában fekvő $\boldsymbol{v}_3$ vektor előállítható $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ lineáris kifejezéseként. Ez könnyen belátható a 20. ábra alapján.



20. ábra



21. ábra

Húzzunk a $\boldsymbol{v}_3$ vektor kezdőpontján át a $\boldsymbol{v}_1$ hatásvonalával, végpontján át pedig a $\boldsymbol{v}_2$ hatásvonalával párhuzamos egyeneseket. Az így keletkező $V_1V_2V_3$ háromszög oldalait az $\alpha_1\boldsymbol{v}_1$, $\alpha_2\boldsymbol{v}_2$ és $\boldsymbol{v}_3$ vektorok alkotják, amelyekre nyilván fennáll, hogy

$$\boldsymbol{v}_3 = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2.$$

(Megjegyzés: akár α_1, akár α_2, akár mindkettő lehet negatív is, mint a 21. ábra által szemléltetett esetben.)

Hasonlóképpen három dimenziós térben háromnál több lineárisan független vektor nincsen, azaz bármely $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ vektornégyeshez találhatók olyan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ skalárok, hogy

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 + \alpha_4\boldsymbol{v}_4 = 0$$

és egyúttal

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4| > 0$$

legyen.

Ebből következik, hogy ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ lineárisan függetlenek, akkor a tér bármely $\boldsymbol{v}$ vektora a következőképpen állítható elő:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z.$$

Itt x, y, z a $\boldsymbol{v}$ vektornak az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ lineárisan független vektorok (alapvektorok) alaprendszerére vonatkozó *koordinátái*.

h) Derékszögű alaprendszer

Ahhoz, hogy három vektor a háromdimenziós térben *alaprendszert* alkosson, csak az szükséges, hogy lineárisan függetlenek legyenek (szemléletesen: az egy kezdőpontból kiinduló három vektor egy triéder (háromoldalú testszöglet) három élén legyen).

A gyakorlati számítások nagymértékű egyszerűsödésére vezet azonban, ha alapvektoroknak olyan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ egységvektorokat választunk, amelyek egymásra páronként merőlegesek és a felírás sorrendjében jobbsodrású rendszert alkotnak, tehát

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Ebben a rendszerben

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

ahol x, y, z a $\boldsymbol{v}$ vektor *derékszögű koordinátái.* Ha $\boldsymbol{v}$ kezdőpontja az x, y, z derékszögű koordinátarendszer kezdőpontja, akkor a $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ vektor koordinátái éppen a P végpont derékszögű koordinátái. Ugyanis $\boldsymbol{v}$-nek az $\boldsymbol{i}$ irányára való merőleges vetülete (l. 22. ábra):

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i} = x,$$

éppen így

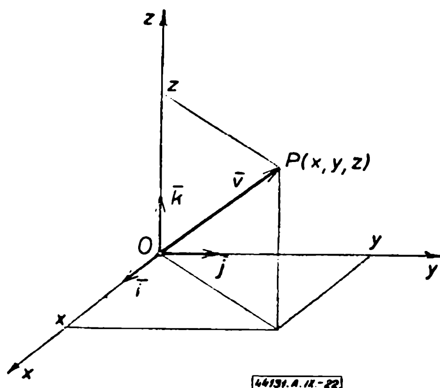
$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j} = y,$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = z.$$

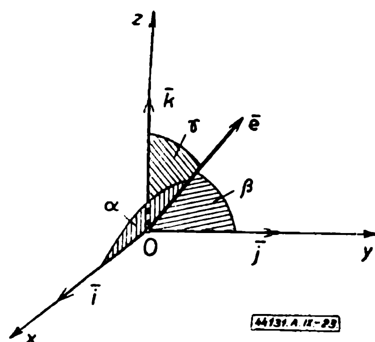
Egységvektor derékszögű koordinátái rendre a vektor $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$-val alkotott α, β, γ szögeinek cosinusai *(iránycosinusok) :*

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}\cdot\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cdot\cos\beta + \boldsymbol{k}\cdot\cos\gamma.$$

Az, hogy alapvektoroknak egységvektorokat választottunk, azzal jár, hogy az x, y, z koordinátatengelyek (amelyeket az O-ban támadó $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jelöl ki) mentén ugyanaz a hosszegység; hogy $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ páronként merőlegesek (orthogonálisak), azt eredményezi, hogy a koordinátarendszer derékszögű; végül, hogy $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jobbsodrású, az főképpen az elektrotechnika igényeit elégíti ki.



22. ábra



23. ábra

j) A műveletek elvégzése derékszögű koordinátáikkal megadott vektorok esetén

A derékszögű koordinátáival megadott vektort a következőképpen jelöljük:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

ahol a_1, a_2, a_3 a derékszögű koordináták.

Összeg és különbség

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \pm (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) =$$
$$= (a_1 \pm b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 \pm b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 \pm b_3)\boldsymbol{k}.$$

Skalárral való szorzás

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \lambda a_1\boldsymbol{i} + \lambda a_2\boldsymbol{j} + \lambda a_3\boldsymbol{k}.$$

Skaláris szorzás

A skaláris szorzás disztributív lévén, minden tagot minden taggal szorzunk, és figyelemmel vagyunk arra, hogy $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ egységvektorok és orthogonális rendszert alkotnak ($\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0$).

$$\boldsymbol{ab} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Ebből adódik a vektor *abszolút értékére:*

$$|\boldsymbol{a}| = \overset{+}{\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}} = \overset{+}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}} = \overset{+}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\,.$$

Ha $\boldsymbol{e}$ (e_x, e_y, e_z) egységvektor, akkor koordinátái az iránycosinusok és ezekre:

$$\boldsymbol{e}^2 = e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy a zérusvektor mindhárom koordinátája zérus.

Vektoriális szorzás

Itt is minden tagot minden taggal megszorzunk és kihasználjuk az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ egységvektorok orthogonalitását.

$$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0,\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j});$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

Ezt a képletet könnyen megjegyezhető alakban írhatjuk fel a következő harmadrendű *determináns* segítségével:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

k) Három vektor vegyes szorzata

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ebben a sorrendben adott vektorok *vegyes szorzatát* (jele: $\boldsymbol{abc}$) úgy értelmezzük, mint az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektoriális szorzatának a $\boldsymbol{c}$-vel való skaláris szorzatát, tehát:

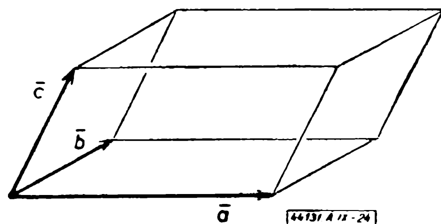
$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

A vegyes szorzat tehát skalármennyiség, melynek értéke egyezik az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ élvektorú parallelepidedon köbtartalmának előjeles mérőszámával. Ugyanis

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

a parallelepipedon $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ élvektorú lapjának területe,

$$|\boldsymbol{c}|\cdot\cos(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$



24. ábra

pedig a harmadik, $\boldsymbol{c}$ élvektor végpontjából e lapra bocsátott merőleges mérőhossza, pozitív vagy negatív előjellel ellátva aszerint, amint az $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok hegyesszöget vagy tompaszöget alkotnak.

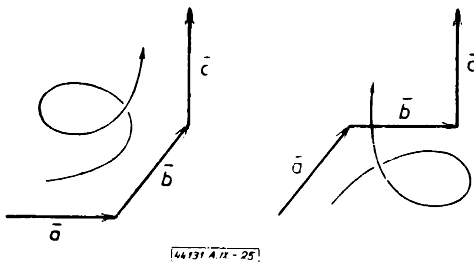
Az előjel még a következőképpen is meghatározható: a vegyes szorzat pozitív vagy negatív aszerint, amint $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ úgy következik egymásután, mint a jobb kéz, illetőleg a bal kéz hüvelyk-, mutató és középső ujja.

Vagy másképpen: az előjel pozitív vagy negatív aszerint, amint a tényezők sorrendjében folytatólagosan összeillesztett $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorpoligon jobb-, illetve balcsavarodású.

Szemlélet útján belátható, hogy az

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) \quad (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

szögek mindegyike egyszerre hegyes- vagy tompaszög. Ugyanis az $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ szög hegyesszög, ha az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak: de ekkor egyúttal



25. ábra

a **b**, **c**, **a**, illetve a **c**, **a**, **b** vektorok is jobbsodrású rendszert alkotnak, tehát a másik két szög is hegyesszög; viszont $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ tompaszög, ha **a**, **b**, **c** (és egyidejűleg **b**, **c**, **a**, illetve **c**, **a**, **b**) balsodrású rendszert képeznek: ekkor a másik két szög is tompaszög.

Ennek folytán:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{abc} &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \\ &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \\ &= (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

vagyis a vegyes szorzat előjelén és nagyságán sem a ciklikus permutáció nem változtat, sem az, hogyan helyezzük a három betű közé a vektori szorzat jelét és a hozzátartozó zárójelet, valamint a skaláris szorzat jelét. Ezzel szemben az előjel megváltozik, ha a betűket nem ciklikusan cseréljük fel. Összefoglalva:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{acb} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{bac}.$$

Ez az ún. *felcserélési tétel.*

A vegyes szorzat lehet zérus anélkül, hogy valamelyik tényezője is zérus lenne. Így zérus, ha a három tényezővektor egy síkkal párhuzamos, azaz nem lineárisan függetlenek.

A vegyes szorzat kifejezése a vektorok koordinátáival:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{abc} &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \\ &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\cdot[(b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}] = \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).\end{aligned}$$

Ez könnyebben megjegyezhető a következő harmadrendű determináns segítségével:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

l) Reciprok vektorrendszer

A skaláris $a \neq 0$ szám reciprokát, A-t a következőképpen definiáljuk:

$$aA = 1,$$

azaz

$$A = \frac{1}{a}.$$

Egy **a** vektorhoz reciprok vektort egyértelműen nem rendelhetünk hozzá, hiszen sem két vektor skaláris szorzatának (ami egyébként nem is vektor), sem vektoriális szorzatának nincs egyértelmű megfordítása. De ha $\boldsymbol{abc} \neq 0$, akkor az **a**, **b**, **c** vektorhármashoz hozzárendelhető az ún. *reciprok vektorhármas:*

A, **B**, **C** a következő definiáló egyenletek alapján

$$\begin{matrix} \boldsymbol{aA} = 1 & \boldsymbol{aB} = 0 & \boldsymbol{aC} = 0 \\ \boldsymbol{bA} = 0 & \boldsymbol{bB} = 1 & \boldsymbol{bC} = 0 \\ \boldsymbol{cA} = 0 & \boldsymbol{cB} = 0 & \boldsymbol{cC} = 1. \end{matrix}$$

Az átlón kívül elhelyezkedő egyenletek geometriailag azt jelentik, hogy az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorok megszabta triédernek az $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ által meghatározott triéder *poláris triédere** és viszont; az átlóban álló egyenletek pedig $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ abszolút értékét és irányát határozzák meg.

A képletek szimmetriája mutatja, hogy ha, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$-nek reciprok rendszere: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, akkor megfordítva $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$-nek reciprok rendszere: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

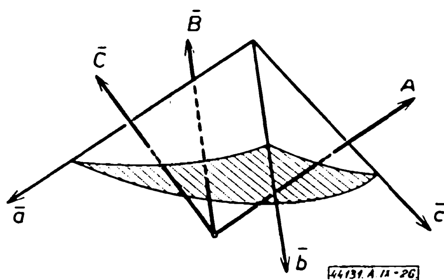
Valamely vektorhármas és reciprok vektorhármas között a következő összefüggések állanak fenn:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{abc}}; \quad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{abc}}; \quad \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{abc}}.$$

Ezeknek helyessége könnyen belátható, ha az egyenleteket rendre megszorozzuk skalárisan $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, ill. $\boldsymbol{c}$-vel.

Továbbá természetesen:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{ABC}}; \quad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{ABC}}; \quad \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{ABC}}.$$



26. ábra

Könnyen belátható, hogy az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ merőleges egységvektorok reciprok vektorhármasa:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}.$$

A reciprok vektorhármas segítségével könnyen felbontható valamely $\boldsymbol{v}$ vektor három megadott vektor ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$) irányába eső összetevőkre. Ha ezeket az összetevőket $\boldsymbol{v}_a, \boldsymbol{v}_b, \boldsymbol{v}_c$-vel jelöljük, azaz

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_b + \boldsymbol{v}_c,$$

akkor nyilván

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{a}x, \quad \boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{b}y, \quad \boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{c}z,$$

tehát

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet skalárisan $\boldsymbol{A}$-val

$$\boldsymbol{vA} = \boldsymbol{aA}x + \boldsymbol{bA}y + \boldsymbol{cB}z = x;$$

hasonlóképpen szorozva $\boldsymbol{B}$-vel, illetve $\boldsymbol{C}$-vel, nyerjük:

$$\boldsymbol{vB} = y; \quad \boldsymbol{vC} = z.$$

Így tehát a felbontás:

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{vA})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{vB})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{vC})\boldsymbol{c}.$$

A reciprok vektorhármast igen előnyösen fel fogjuk még használni a hármas vektorszorzat kifejtési tételénél, továbbá a lineáris inhomogén egyenletrendszerek megoldásánál (l. 4. §. *d)*).

* A poláris triéder élei az adott triéder oldalaira merőlegesek.

m) Hármas vektorszorzat

Három, adott sorrendben felírt $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}$ vektor *hármas vektorszorzatán* az

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{v}$$

szorzat értendő (ez természetesen vektor).

Minthogy ez a szorzatvektor merőleges $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$-re és $\boldsymbol{v}$-re, azért párhuzamosnak kell lennie az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok síkjával, tehát lineárisan függenie kell az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektoroktól

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Az α és β meghatározása végett tekintsük az

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2}$$

speciális vektorhármast; ennek az a nevezetes tulajdonsága, hogy

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2} = 1,$$

továbbá, a reciprok hármasra nézve:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{abc}} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Vegyük még számításba, hogy a reciprok hármast definiáló egyenletek szimmetriája folytán most

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2},$$

következésképpen

$$\boldsymbol{ABC} = 1$$

és így

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}.$$

Bontsuk fel most már a $\boldsymbol{v}$ vektort az $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ irányába eső összetevőkre:

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{va})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{vb})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{vc})\boldsymbol{C}.$$

Ekkor az $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{v}$ hármas vektorszorzat a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{C}\times[(\boldsymbol{va})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{vb})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{vc})\boldsymbol{C}] = \\ &= (\boldsymbol{va})(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{vb})(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{vc})(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}) = \\ &= (\boldsymbol{va})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{vb})\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

A keresett α és β értéke tehát:

$$\alpha = -(\boldsymbol{vb}), \quad \beta = (\boldsymbol{va}).$$

Ez az összefüggés a hármas vektorszorzat *kifejtési tétele.*

Jeleztük már, hogy a hármas vektorszorzatnál a tényezők sorrendje lényeges, tehát pl.

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \neq (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}.$$

Fennáll azonban a következő összefüggés:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

Felhasználva ugyanis a kifejtési tételt, az egyenlet bal oldala a következőképpen alakul:

$$(\boldsymbol{ca})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{cb})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{ba})\boldsymbol{c}$$

és ez valóban egyenlő zérussal.

A hármas vektorszorzat nem szükségképpen zérus, ha két tényezője megegyezik:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{a}.$$

n) Négyes vektorszorzatok

Négyes vektorszorzatok a kifejtési és felcserélési tételek segítségével számíthatók ki; lényegesen újat nem hoznak.

1. $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}=$$

(mert úgy fogható fel, mint az $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ vektorok vegyes szorzata)

$$=[(\boldsymbol{ca})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{cb})\boldsymbol{a}]\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd})-(\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}),$$

vagy

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc}\\ \boldsymbol{ad} & \boldsymbol{bd}\end{vmatrix}.$$

2. $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}]\boldsymbol{b}-[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}]\boldsymbol{a}=$$

mert úgy fogható fel, mint az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ vektorok hármas vektorszorzata)

$$=(\boldsymbol{acd})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{bcd})\boldsymbol{a}.$$

Ez azt jelenti, hogy a négyes szorzat párhuzamos az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok síkjával. Viszont:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=-[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=$$

$$=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{d}]\boldsymbol{c}-[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{abd})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{d}.$$

Eszerint még párhuzamos a $\boldsymbol{c}$ és $\boldsymbol{d}$ vektorok síkjával.

Tehát: a négyes vektorszorzat párhuzamos a két sík metszésvonalával.

3. Az olvasó maga igazolja a következő azonosságot:

$$\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_4)-\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{v}_3(\boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)-\boldsymbol{v}_4(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3)\equiv\boldsymbol{0}.$$

MINTAPÉLDÁK

1. Legyenek $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ egymással párhuzamos vektorok. Bebizonyítandó, hogy

$$|\boldsymbol{b}|\cdot\boldsymbol{a}\pm|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

Mikor érvényes a pozitív és mikor a negatív előjel?

*

* *

Mivel $|\boldsymbol{b}|$ pozitív skalármennyiség, $|\boldsymbol{b}| \cdot \boldsymbol{a}$ olyan vektor, mely $\boldsymbol{a}$-val párhuzamos, vele egyirányú és abszolút értéke $|\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{a}|$; hasonlóképpen $|\boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{b}$ olyan vektor, mely $\boldsymbol{b}$-vel párhuzamos, vele egyirányú és abszolút értéke $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$.

Eszerint a $|\boldsymbol{b}| \cdot \boldsymbol{a}$ és $|\boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{b}$ vektorok — melyek az eredeti feltétel következtében párhuzamosak — abszolút értékükben megegyeznek, és így szükségképpen vagy összegük, vagy különbségük zérus aszerint, hogy $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ ellenkező, illetve egyező irányúak.

2. Hogyan választandó az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor úgy, hogy az α és β skaláris mennyiségektől függetlenül

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \perp \beta\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$$

legyen? Mi ennek a geometriai jelentése?

*
* *

Merőleges vektorok skaláris szorzata zérus, tehát

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot (\beta\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\beta\boldsymbol{a}^2 + \beta^2\boldsymbol{ab} - \alpha^2\boldsymbol{ab} - \alpha\beta\boldsymbol{b}^2 =$$

$$= \alpha\beta(\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2) + (\beta^2 - \alpha^2)\boldsymbol{ab} = 0.$$

Ez az egyenlőség α-tól és β-től függetlenül akkor áll fenn, ha

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

Geometriai jelentés: az $\alpha\boldsymbol{a}$ és $\beta\boldsymbol{b}$ oldalakkal, illetve a $\beta\boldsymbol{a}$ és $-\alpha\boldsymbol{b}$ vektorokkal szerkesztett parallelogrammák átlói csak az $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ és $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ feltételek mellett lesznek egymásra merőlegesek.

3. Adva van $\boldsymbol{a}$ vektor. Határozzuk meg mindazon $\boldsymbol{b}$ vektorokat, melyeknek vetülete $\boldsymbol{a}$-ra ugyanakkora, mint $\boldsymbol{a}$ vetülete $\boldsymbol{b}$-re.

*
* *

A kikötés szerint

$$\frac{\boldsymbol{ba}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

Ez teljesül, ha

$$\boldsymbol{ab} = 0,$$

azaz ha $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ egymásra merőlegesek, mert ekkor mindkét vetület zérus; az

$$\boldsymbol{ab} \neq 0$$

esetben pedig akkor, ha

$$\frac{1}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|},$$

azaz

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|.$$

4. Bebizonyítandó a síkháromszögekre vonatkozó sinustétel.

*
* *

A háromszög oldalait alkossák az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorok olyan irányítással, hogy

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$$

legyen. Ebből

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát vektoriálisan szorozva balról $\boldsymbol{a}$-val,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=0,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

De ekkor

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|,$$

tehát

$$ab\sin\gamma=ca\sin\beta,$$

innen

$$b:c=\sin\beta:\sin\gamma.$$

Bebizonyítandó a síkháromszögekre vonatkozó cosinustétel.

*

* *

A háromszög oldalait alkossák az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorok olyan irányítással, hogy

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

legyen. Mindkét oldalt önmagával skalárisan szorozva

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\,\boldsymbol{bc}\cos(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

Az oldalvektorok irányítása folytán

$$\cos(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-\cos\alpha$$

és így

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\alpha.$$

6. Legyen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ három tetszőleges vektor. Hogyan választható meg a β és γ skaláris számok úgy, hogy

$$\beta\boldsymbol{b}-\gamma\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$$

legyen?

*

* *

Skalárisan szorozva $\boldsymbol{a}$-val, a merőlegesség folytán

$$\beta\boldsymbol{ab}-\gamma\boldsymbol{ac}=0,$$

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\boldsymbol{ac}}{\boldsymbol{ab}}.$$

Szükséges, hogy $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$ legyen, kivéve, ha $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$, amikor is három eset lehetséges: 1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 2) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, azaz $\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{c}$.

7. Mutassuk ki, hogy ha $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tetszőleges vektorok, akkor

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})\perp\boldsymbol{a}.$$

*

* *

Skalárisan szorzva $\boldsymbol{a}$-val

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot (\boldsymbol{ac}) - (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{ab}) = 0,$$

tehát a kapcsolat valóban fennáll, mert csak merőleges vektorok skalárszorzata zérus.

8. Legyen $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy

$$\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}.$$

*

* *

Skalárisan szorozva $\boldsymbol{a}$-val

$$\boldsymbol{ab} - \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ab} = 0,$$

tehát az állítás igaz (l. az előző példát).

9. Mutassuk ki, hogy ha

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0},$$

akkor az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorokat közös O támadáspontból felrajzolva, végpontjaik egy egyenesbe esnek.

*

* *

A feltétel a 17. mintapéldában foglaltak alapján így is írható:

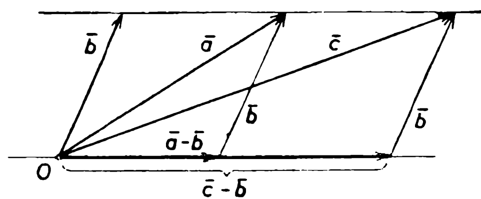
$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}.$$

De ekkor

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c},$$

vagy

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}.$$



27. ábra

Felrajzolván most már O-ból az $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorokat, nyilvánvalóvá válik, hogy $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ végpontjai egy egyenesen vannak; mert ha párhuzamos és egyenlő hosszú egyenesszakaszok egy egyenesből indulnak ki, akkor végpontjaik is egy (az előbbivel párhuzamos) egyenesre esnek.

10. Az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok helyzetvektorai (a kezdőpontból a jelzett pontokba mutató vektorok) legyenek rendre $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$. Milyen kapcsolat áll fenn ezek között, ha a négy pont egy körön van?

*

* *

Ha a négy pont egy körön van, akkor az egy íven nyugvó kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján

$$A_1A_3A_2 \sphericalangle \quad \text{és} \quad A_1A_4A_2 \sphericalangle$$

vagy egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást, így

$$\cos (A_1A_3A_2) \sphericalangle = \pm \cos (A_1A_4A_2) \sphericalangle.$$

A vektorokkal kifejezve

$$\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3)}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)^2}\sqrt{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3)^2}} = \pm \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_4)}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_4)^2}\sqrt{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_4)^2}}.$$

11. Igazolandó: ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az átellenes oldalak négyzetösszege egyenlő.

*

* *

A négyszög csúcspontjainak helyzetvektorait $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B, \boldsymbol{r}_C, \boldsymbol{r}_D$-vel jelölve (l. 28. ábra)

$$(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B)^2 + (\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_D)^2 - (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_C)^2 - $$
$$- (\boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r}_A)^2 = 2(\boldsymbol{r}_B\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_D\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_A\boldsymbol{r}_B -$$
$$- \boldsymbol{r}_C\boldsymbol{r}_D) = 2(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_C)(\boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r}_B) = 0$$

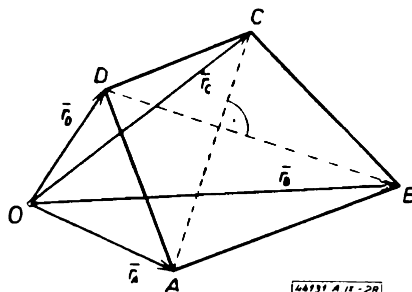
(a feltétel folytán).

Mivel

$$(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B)^2 = AB^2, \quad (\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_D)^2 = CD^2,$$
$$(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_C)^2 = BC^2, \quad (\boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r}_A)^2 = AD^2,$$

azért

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$



28. ábra

12. Igazolandó a következő azonosság:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

*

* *

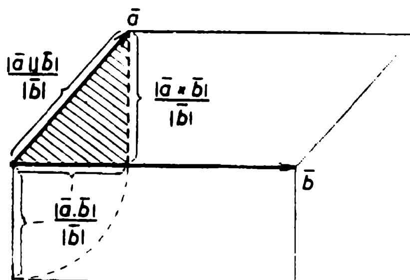
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \sin^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$
$$(\boldsymbol{ab})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot \cos^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Következésképpen

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot [\sin^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \cos^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})] = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

Az azonosság geometriai szemlélet alapján is igazolható (l. 29. ábra).

Mivel az $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ vektoriális szorzat abszolút értékét a romboid, az $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ skalárszorzat abszolút értékét pedig a téglalap területe méri, a beárnyékolt derékszögű háromszög oldalaira az ábrán jelzett méretek érvényesek. Pythagoras tételének alkalmazásával az azonosság helyessége rögtön belátható.



29. ábra

13. Kiszámítandó

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$

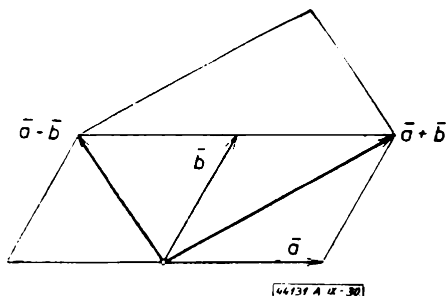
Mi az eredmény geometriai értelme?

*

* *

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}) = -2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

Ha a két oldal abszolút értékét tekintjük



30. ábra

$$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})| = 2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,$$

akkor az eredmény azt mondja ki, hogy bármely parallelogramma átlóival szerkesztett parallelogramma területe az eredetinek kétszerese.

14. Mutassuk ki, hogy ha

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$$

és

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d},$$

akkor

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}\,||\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

*

* *

A második egyenlőség két oldalát felcserélve és az egyenlőségeket összeadva

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}),$$

vagy

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).$$

Összevonva

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a});$$

zérusra redukálva

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}.$$

De ha két vektor vektoriális szorzata zérus, akkor párhuzamosak, tehát valóban

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}\,||\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

15. Keresendők mindazok a $\boldsymbol{v}$ vektorok, melyeknek bizonyos a egyenesre való vetületük megadott α számmal egyenlő.

*

* *

Rajzoljuk fel a $\boldsymbol{v}$ vektorokat közös O kezdőpontból; ugyaninnen induljon ki az egyenes irányát jelző $\boldsymbol{a}$ vektor. Mivel minden $\boldsymbol{v}$-re

$$|\boldsymbol{v}|\cdot\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) = \alpha$$

egyenlőségnek kell teljesülni, a $\boldsymbol{v}$ vektorok olyan derékszögű háromszögek átfogói, melyeknek közös, az $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})$ szög melletti befogója α hosszúságú. Ebből következik, hogy a vektorok végpontjai olyan síkon fekszenek, mely merőleges az a egyenesre és az O ponttól α távolságra van.

16. Legyen adva két, egy kezdőpontból felrajzolt vektor: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Mi a geometriai helye azon $\boldsymbol{A}$ vektorok végpontjainak, melyekre

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a} = 1, \qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} = 0.$$

*

* *

Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ vektorokat közös O támadáspontból felrajzolva $\boldsymbol{A}$-nak merőlegesnek kell lennie $\boldsymbol{b}$-re, továbbá végpontjának olyan síkon kell lennie, mely merőleges $\boldsymbol{a}$-ra és amelyek O-tól való távolságát az $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}=1$ egyenlet határozza meg:

$$d=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\,.$$

Következésképpen: $\boldsymbol{A}$ végpontja az O-n átfektetett, $\boldsymbol{b}$-re merőleges, valamint az $\boldsymbol{a}$-ra merőleges (és O-tól $d=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ távolságra levő) síkok metszésvonalán van.

17. Mivel egyenlő az

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$$

szorzat és mi a geometriai jelentése?

*

* *

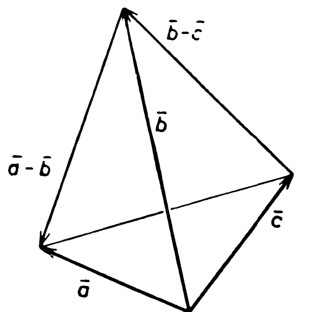
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).$$

Legyenek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ egy tetraéder O csúcspontjából kiinduló jobbsodrású rendszert alkotó élvektorok (l. 31. ábra).

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ olyan vektor, melynek abszolút értéke kétszerese az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok által alkotott háromszög területének; iránya a tetraéder $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ élű lapjára merőleges és kezdőpontját e lap egy belső pontjába helyezve kifelé (tehát nem a tetraéder belsejébe) mutat.

Hasonló jelentésű a $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, illetve a $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ vektor is.

Az $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ vektor abszolút értéke a tetraéder negyedik lapjának kétszeres területével egyenlő; a vektor a tetraéder negyedik lapjára merőleges, azonban — az előbbi három vektorral ellentétben — a tetraéder belsejébe mutat.



31. ábra

Már most a szorzással nyert egyenlőséget zérusra redukálva

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})-[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{0},$$

vagy a negyedik vektor irányításának megfordításával

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{0}.$$

Az egyenlőség geometriai tartalma tehát a következő: a tetraéder egyes lapjainak területeivel arányos nagyságú, az egyes lapokra merőleges és kifelé mutató vektorok összege a zérus vektor.

Megjegyezzük, hogy ez a megállapítás poliéderekre is általánosítható (a poliédert tetraéderekre osztjuk fel).

18. Mutassuk ki, hogy ha

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},$$

akkor

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\quad (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\quad \text{és}\quad (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

párhuzamos vektorok.

*

* *

Az egyenlőséget zérusra redukálva

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = 0.$$

De (lásd az előző mintapéldát)

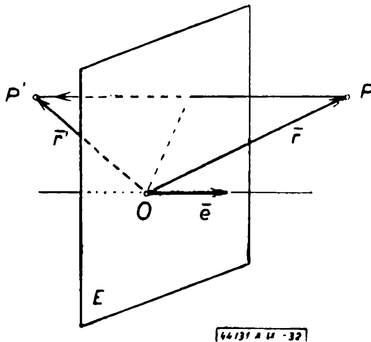
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}),$$

tehát az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ élvektorokkal meghatározott tetraédernek az $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ élvektorokkal meghatározott lapja zérus területű, azaz három csúcspontja egy egyenesbe esik. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ egy síkba esnek; de egy síkba eső vektorok vektoriális szorzata a síkra merőleges, tehát

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\quad (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\quad (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

valóban párhuzamos vektorok.

19. Fektessünk az origón át az $\boldsymbol{e}$ egységvektorra merőleges E síkot. A P pont helyzetvektora legyen $\boldsymbol{r}$. Mi a helyzetvektora P tükörképének az E síkra nézve?



32. ábra

*

* *

P tükörképe legyen P', annak helyzetvektora $\boldsymbol{r}'$. Ekkor

$$\boldsymbol{r} + \overrightarrow{PP'} = \boldsymbol{r}'$$

$$\overrightarrow{PP'} = -2(\boldsymbol{er})\boldsymbol{e},$$

tehát

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - 2(\boldsymbol{er})\boldsymbol{e}.$$

20. Bebizonyítandó: ha egy négyszög átlói metszik egymást, a négyszög nem lehet torznégyszög (hanem szögpontjai egy síkban vannak).

*

* *

Legyen az átlók metszéspontja M, és jelöljük az M-ből a csúcspontok felé mutató vektorokat $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$-vel. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ egy síkban vannak és

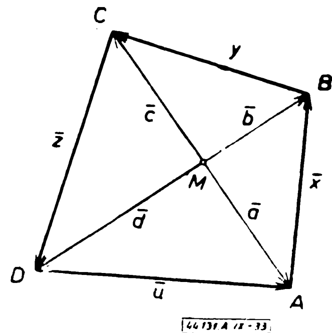
$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{d} = \mu\boldsymbol{b}.$$

A négyszögnek a 33. ábrán látható oldalvektorai ekkor:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c} = \mu\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \mu\boldsymbol{b}.$$



33. ábra

Ebből látható, hogy mind a négy oldalvektor és ezzel a csúcspontok is egy síkban vannak.

*21. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ egy pontból kiinduló vektorok. Mi annak szükséges és elegendő feltétele, hogy végpontjaik egy egyenesbe essenek?

*

* *

Foglalkozzunk először a szükséges feltétellel, azaz vizsgáljuk meg a következményeket, ha az adott vektorok végpontjai egy egyenesen vannak. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben a

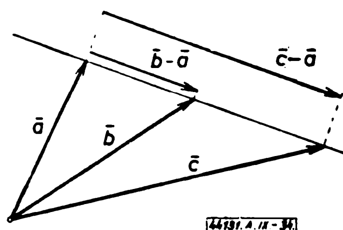
$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \quad \text{és a} \quad \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$$

különbségi vektorok ebben az egyenesben fekszenek és így csak egy skalár szorzóban különböznek:

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

Az egyenlőséget rendezve

$$(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$



34. ábra

Bármekkora szám is λ (azaz: bárhol is legyenek az egyenesen az adott vektorok végpontjai), minden esetben

$$(1-\lambda)+\lambda+(-1)=0$$

és

$$(1-\lambda)^2+\lambda^2+(-1)^2>0.$$

A szükséges feltétel tehát a következőképpen fogalmazható meg: létezniök kell olyan k, l és m számoknak, melyekre nézve

$$\left.\begin{aligned} k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}&=0\\ k+l+m&=0\\ k^2+l^2+m^2&>0.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Könnyen belátható, hogy ez egyúttal elégséges is, azaz az (1) alatti feltételek teljesülése esetén az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok végpontjai valóban egy egyenesen vannak.

Ekkor ugyanis a k, l, m számok mindegyike nem lehet zérus; legyen pl. $k \neq 0$. Továbbá

$$\boldsymbol{a}=-\frac{l}{k}\boldsymbol{b}-\frac{m}{k}\boldsymbol{c}=\frac{l}{l+m}\boldsymbol{b}+\frac{m}{l+m}\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\frac{l}{l+m}\boldsymbol{b}-\frac{m}{l+m}\boldsymbol{c}=-\frac{l}{l+m}\boldsymbol{b}+\left(1-\frac{m}{l+m}\right)\boldsymbol{c}=-\frac{l}{l+m}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\frac{l}{l+m}\boldsymbol{b}-\frac{m}{l+m}\boldsymbol{c}=\left(1-\frac{l}{l+m}\right)\boldsymbol{b}-\frac{m}{l+m}\boldsymbol{c}=\frac{m}{l+m}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

Végül

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = -\frac{l}{m}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

amivel az állítást igazoltuk.

*22. Legyenek $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ és $\boldsymbol{p}$ egy pontból kiinduló vektorok és

$$\boldsymbol{p} = k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2.$$

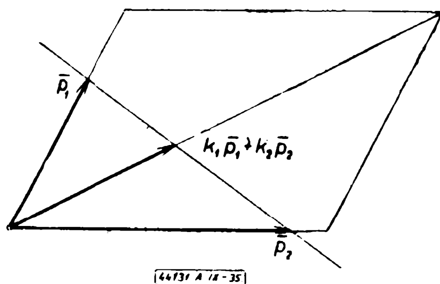
Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy végpontjaik egy egyenesen legyenek?

*

* *

Szükséges feltétel: az előző feladathoz hasonlóan

$$(k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{p}_1 = \lambda[\boldsymbol{p}_2 - (k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2)].$$



35. ábra

Rendezve:

$$(k_1 - 1 + \lambda k_1)\boldsymbol{p}_1 = (\lambda - \lambda k_2 - k_2)\boldsymbol{p}_2.$$

Mivel $\boldsymbol{p}_1$ és $\boldsymbol{p}_2$ akármilyen vektorok lehetnek, ez az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mind $\boldsymbol{p}_1$, mind $\boldsymbol{p}_2$ skalár szorzója zérus, amiből

$$k_1(1 + \lambda) = 1$$
$$k_2(1 + \lambda) = \lambda$$
$$\overline{(k_1 + k_2)(1 + \lambda) = 1 + \lambda.}$$

Ez az összefüggés viszont csak akkor lehet igaz, ha

$$\underline{k_1 + k_2 = 1.}$$

(Megjegyzés: $\lambda = -1$ esetén, amikor is $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$, a feladat elveszti értelmét.

Elégséges feltétel: ha

$$k_1 + k_2 = 1,$$

akkor

$$(k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{p}_1 = k_1\boldsymbol{p}_1 + (1 - k_1)\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = (k_1 - 1)(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$$

és

$$\boldsymbol{p}_2 - (k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{p}_2 - k_1\boldsymbol{p}_1 - (1 - k_1)\boldsymbol{p}_2 = -k_1(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2),$$

következésképpen

$$(k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{p}_1 = -\frac{k_1 - 1}{k_1}[\boldsymbol{p}_2 - (k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2)] =$$

$$= \lambda[\boldsymbol{p}_2 - (k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2)].$$

Ez azt bizonyítja, hogy a

$$\boldsymbol{p}_1,\ k_1\ \boldsymbol{p}_1 + k_2 \cdot \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_2$$

vektorok végpontjai egy egyenesen vannak, tehát a

$$k_1 + k_2 = 1$$

feltétel elégséges is.

23. Bebizonyítandó, hogy a parallelogramma átlói felezik egymást.

*
* *

A parallelogramma két szomszédos oldalát az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok alkossák. Nyilvánvaló, hogy ekkor az átlókat az $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, illetve $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ vektorok adják meg. A parallelogramma A, ill. D csúcspontjaiból az átlók M metszéspontjába mutató vektorok nyilván a

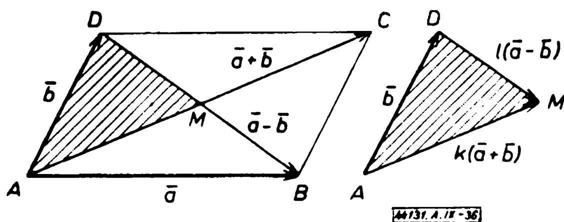
$$k \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \quad \text{ill.} \quad l \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

alakban írhatók, és a következő összefüggés írható fel:

$$k \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + l \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$

Rendezés után

$$(k - l)\,\boldsymbol{a} = (1 - l - k)\boldsymbol{b}.$$



36. ábra

Minthogy $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ különböző irányú vektorok, ez az összefüggés csak akkor állhat fenn, ha

$$k - l = 0$$

és

$$1 - l - k = 0,$$

amiből

$$k = l = \frac{1}{2}.$$

Ez az eredmény éppen azt bizonyítja, hogy a parallelogramma átlói felezik egymást.

24. Bizonyítandó: a háromszög egyik oldalával párhuzamos, másik oldalát felező egyenes felezi a harmadik oldalt is.

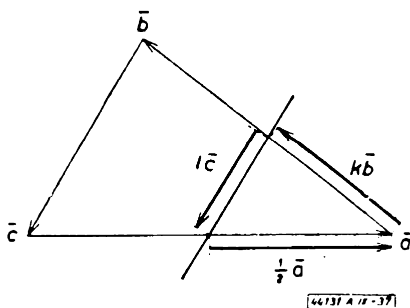
*
* *

A háromszög oldalait alkossák az ábrán látható irányítású, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorok; ekkor nyilván

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0},$$

és

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} + l\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$



37. ábra

A második egyenlőség kétszereséből az elsőt levonva

$$(2k-1)\cdot \boldsymbol{b} + (2l-1)\cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

Mivel $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ nem párhuzamos vektorok,

$$2k-1=0,$$

$$2l-1=0,$$

azaz

$$k=l=\frac{1}{2}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

*25. Kössük össze egy parallelogramma valamelyik csúcspontját egyik nem mellette fekvő oldalának felezőpontjával. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert egyenesszakasznak és a parallelogramma kiválasztott csúcspontját elkerülő átlónak metszéspontja az egyenesszakaszt is, az átlót is 2 : 1 arányban osztja.

*

* *

Legyen

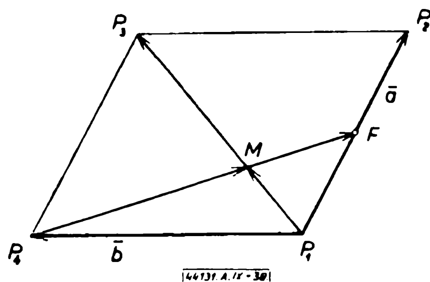
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{a} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{P_1P_4} = \boldsymbol{b}.$$

Ekkor

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{P_1M} = k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

továbbá

$$\overrightarrow{P_4F} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{P_4M} = l\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right).$$



38. ábra

Nyilvánvaló, hogy

$$\overrightarrow{P_4M} = \overrightarrow{P_1M} - \overrightarrow{P_1P_4},$$

azaz

$$\left(l\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right) = k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}.$$

Rendezve

$$\left(\frac{l}{2} - k\right)\boldsymbol{a} = (k+l-1)\boldsymbol{b}.$$

Mivel $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ nem párhuzamos vektorok, az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$\frac{l}{2} - k = 0$$

és

$$k + l - 1 = 0,$$

ahonnan

$$k = \frac{1}{3}, \quad l = \frac{2}{3}.$$

Ez az eredmény az állítás bizonyítását jelenti, mert eszerint

$$|\overrightarrow{P_1M}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{P_1P_3}| \quad \text{és} \quad |\overrightarrow{P_4M}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{P_4F}|.$$

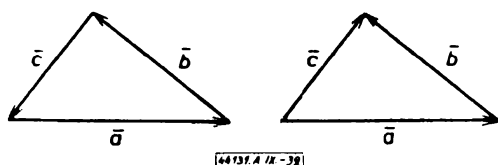
*26. Bebizonyítandó, hogy egy tetszőleges háromszög súlyvonalaival háromszög szerkeszthető.

*
* *

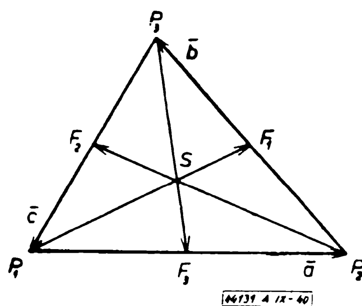
A bizonyításhoz felhasználjuk azt az egyszerű tényt, hogy az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorokkal háromszög alkotható, ha

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \quad \text{vagy} \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

Vegyük pl. az $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ egyenletnek megfelelő irányítású háromszöget; ekkor a súlyvonalaknak megfelelő vektorok:



39. ábra



40. ábra

$$\overrightarrow{P_1F_1} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{P_2F_2} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{P_3F_3} = \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

Mivel

$$\overrightarrow{P_1F_1} + \overrightarrow{P_2F_2} + \overrightarrow{P_3F_3} = \frac{3}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0},$$

azért a $\overrightarrow{P_1F_1}$, $\overrightarrow{P_2F_2}$, $\overrightarrow{P_3F_3}$ vektorokkal és így a háromszög súlyvonalaival alkotható háromszög.

Megjegyezzük, hogy a bizonyítást természetesen az $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ egyenletből kiindulva is elvégezhettük volna.

Megjegyezzük végül, hogy e feladat *mechanikailag* a következőképpen értelmezhető: ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ egy ponton átmenő, egyensúlyban levő erőrendszer ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$), akkor az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ erőkkel rajzolt háromszög megfelelő irányítású súlyvonalvektoraival arányos erők is egyensúlyi erőrendszert alkotnak.

*27. A háromszög súlyvonalai egy pontban (S) metszik egymást és ez a pont (súlypont) mindegyik súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja.

*

* *

Legyenek a háromszög csúcspontjai P_1, P_2, P_3 és

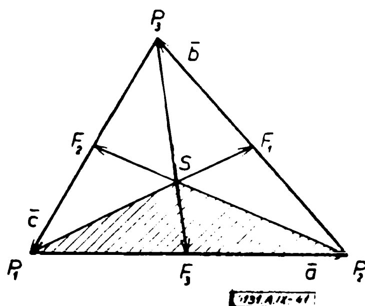
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{P_2P_3} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{P_3P_1} = \boldsymbol{c},$$

ekkor

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0},$$

továbbá

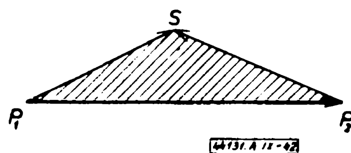
$$\overrightarrow{P_1F_1} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{P_2F_2} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{P_3F_3} = \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$



41. ábra

Nyilvánvaló, hogy

$$\overrightarrow{P_1S} = k \cdot \overrightarrow{P_1F_1} = k\left(\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$$



42. ábra

és

$$\overrightarrow{P_2S} = l \cdot \overrightarrow{P_2F_2} = l\left(\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right),$$

ahol k és l egyelőre ismeretlen skalárok.

Közvetlenül belátható, hogy

$$\overrightarrow{P_1S} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2S};$$

az értékeket beírva

$$k\left(\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) = \boldsymbol{a} + l\left(\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right) = \boldsymbol{a} + l\left[\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\right].$$

Rendezve

$$\left(1 - \frac{l}{2} - k\right)\boldsymbol{a} + \left(\frac{l}{2} - \frac{k}{2}\right)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ különböző irányú vektorok lévén, ez az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$1 - \frac{l}{2} - k = 0$$

és

$$\frac{k}{2} - \frac{l}{2} = 0,$$

ahonnan

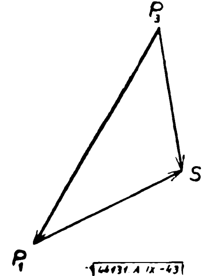
$$k = l = \frac{2}{3}.$$

Ez az eredmény eddig azt bizonyítja, hogy P_1F_1 és P_2F_2 súlyvonalak metszéspontja azokat 2 : 1 arányban osztja. Hátra van még annak kimutatása, hogy metszéspontjukon a harmadik súlyvonal is átmegy és az osztási arány annál is 2 : 1.

$$\overrightarrow{P_3S} = \overrightarrow{P_3P_1} + \overrightarrow{P_1S} = \boldsymbol{c} + \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}(-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = \frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{P_3F_3}.$$



43. ábra

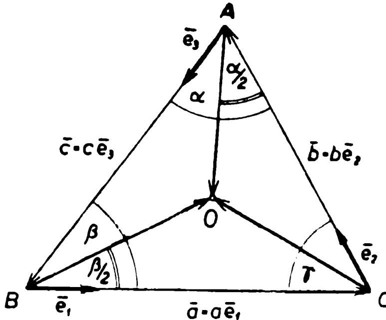
Ezzel az állítást teljesen igazoltuk.

*28. Bebizonyítandó, hogy a háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át.

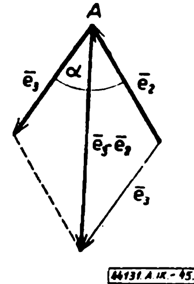
*

* *

Az ABC háromszög α és β szögeit felező egyenesek metszéspontját jelöljük O-val. A tételt bebizonyítjuk, ha kimutatjuk, hogy a $\overrightarrow{CO}$ vektor iránya megegyezik a γ szögfelezőjének irányával.



44. ábra



45. ábra

Először is állapítsuk meg, hogyan írhatók fel a belső szögfelezők irányába mutató vektorok. Ha a háromszög oldalain felvesszük pl. a pozitív körüljárásnak megfelelő irányítású $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ egységvektorokat ($\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a} = a \cdot \boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b} = b \cdot \boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AB} =$ $= \boldsymbol{c} = c \cdot \boldsymbol{e}_3$), akkor az α szög egy szögfelező vektora:

$$\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2,$$

mert egy rombusz átlóvektora.

Az α szög egy tetszőleges szögfelező vektora tehát ilyen alakú:

$$\lambda(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2).$$

Hasonlóképpen:

β egy tetszőleges szögfelező vektora: $\mu(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3)$,
γ egy tetszőleges szögfelező vektora: $\nu(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)$.

Legyen mármost

$$\overrightarrow{AO} = x(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BO} = y(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3),$$

ahol x és y egyelőre ismeretlen számok; ezek meghatározására felhasználjuk a következő triviális összefüggést:

$$\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{c} + BO$$

$$x(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2) = c\boldsymbol{e}_3 + y(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3).$$

Vegyük számításba továbbá, hogy

$$a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$$

és így

$$-\boldsymbol{e}_2 = \frac{a}{b}\boldsymbol{e}_1 + \frac{c}{b}\boldsymbol{e}_3;$$

ezt az értéket is beírva, az

$$x\left(\boldsymbol{e}_3 + \frac{a}{b}\boldsymbol{e}_1 + \frac{a}{b}\boldsymbol{e}_3\right) = c\boldsymbol{e}_3 + y(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3),$$

majd rendezve az

$$\left(\frac{a}{b}x - y\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{b+c}{b}x + y - c\right)\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$$

egyenlőségre jutunk. Mivel $\boldsymbol{e}_1$ és $\boldsymbol{e}_3$ különböző irányúak, kell, hogy

$$\frac{a}{b}x - y = 0$$

és

$$\frac{b+c}{b}x + y - c = 0$$

legyen, ahonnan

$$x = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{bc}{2s}$$

és

$$y = \frac{ca}{a+b+c} = \frac{ca}{2s}.$$

Ezek után a $\overrightarrow{CO}$ vektorra a következő összefüggés írható fel:

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} - \boldsymbol{a} = y(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) - a \cdot \boldsymbol{e}_1.$$

Ismét felhasználjuk az

$$a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$$

összefüggést, melyből a

$$-\boldsymbol{e}_3 = \frac{a}{c}\boldsymbol{e}_1 + \frac{b}{c}\boldsymbol{e}_2$$

értéket beírva, a

$$\overrightarrow{CO} = y\left(\boldsymbol{e}_1 + \frac{a}{c}\boldsymbol{e}_1 + \frac{b}{c}\boldsymbol{e}_2\right) - a\boldsymbol{e}_1,$$

illetve rendezés után a

$$\overrightarrow{CO} = \frac{ab}{a+b+c}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1) = \frac{ab}{2s}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)$$

kifejezésre jutunk; ebből közvetlenül látható, hogy a $\overrightarrow{CO}$ vektor a γ szögfelezőjének irányába esik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

*29. Húzzunk a parallelogramma oldalaival párhuzamosakat egy belső pontján át. A keletkezett parallelogrammák közül a nem egymás mellett fekvő kettőnek egy-egy átlója és az eredeti parallelogramma egyik átlója kellőképpen meghosszabbítva egy pontban metszik egymást.

*

* *

Legyen

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b},$$

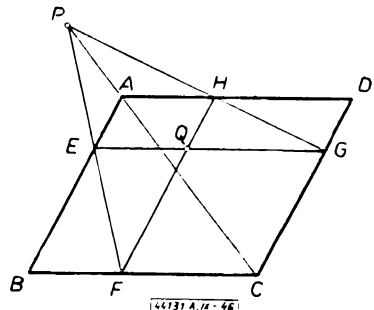
$$\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{d}, \quad \overrightarrow{FE} = \boldsymbol{d}_1, \quad \overrightarrow{GH} = \boldsymbol{d}_2.$$

A Q pont helyzetét a következő osztóviszonyok határozzák meg:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{\mu}{1-\mu}; \quad \frac{AH}{HD} = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Ezekután az átlóvektorok a következőképpen fejezhetők ki:

$$\boldsymbol{d} = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{d}_1 = -(1-\mu)\boldsymbol{a} - \nu\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{d}_2 = -\mu\boldsymbol{a} - (1-\nu)\boldsymbol{b}.$$



46. ábra

Az FE és GH átlók P metszéspontja akkor esik a CA átló meghosszabbítására, ha

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \boldsymbol{d}.$$

Az $\overrightarrow{AP}$ vektort kétféleképpen is elő tudjuk állítani.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EP} = \mu\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{d}_1$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HP} = \nu\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{d}_2.$$

Itt x és y egyelőre ismeretlen skaláris tényezők. Beírva $\boldsymbol{d}_1$ és $\boldsymbol{d}_2$ helyébe az előbbi kifejezéseket

$$\overrightarrow{AP} = [\mu - (1 - \mu)x]\boldsymbol{a} - \nu x\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AP} = -\mu y\boldsymbol{a} + [\nu - (1 - \nu)y]\boldsymbol{b}.$$

$\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ lineárisan függetlenek lévén,

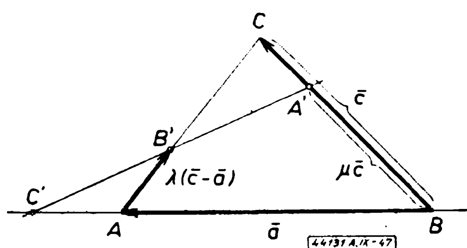
$$\mu - (1 - \mu)x = -\mu y$$

$$-\nu x = \nu - (1 - \nu)y.$$

Ebből az ismeretlen skaláris tényezők

$$x = \frac{-\mu}{\mu + \nu - 1}; \quad y = \frac{-\nu}{\mu + \nu - 1}.$$

Most már $\overrightarrow{AP}$ a következőképpen fejezhető ki (akár x, akár y felhasználásával):



47. ábra

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\mu\nu}{\mu + \nu - 1}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{d}.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

*30. Bebizonyítandó a vektoraritmetika eszközeivel Menelaos tétele. (Menelaos tétele: ha az ABC háromszög oldalait egy egyenes az A', B', C' pontokban metszi, akkor a keletkező szakaszokra a következő összefüggés érvényes:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = A'B \cdot B'C \cdot C'A;$$

l. a 47. ábrát.)

*
* *

Legyen

$$\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a}; \quad \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}.$$

Ekkor

$$(1) \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB'} = \lambda(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}); & \overrightarrow{A'B} = \mu\boldsymbol{c} \\ \overrightarrow{BC'} = \nu\boldsymbol{a}; & \overrightarrow{B'C} = (1 - \lambda)(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \\ \overrightarrow{CA'} = -(1 + \mu)\boldsymbol{c}; & \overrightarrow{C'A} = (1 - \nu)\boldsymbol{a}. \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \text{Itt} \\ 0 < \lambda < 1 \\ \text{és} \\ -1 < \mu < 0. \end{array}$$

Mivel a ν tényező λ-tól és μ-től függ, azokkal kell kifejeznünk. Fennáll a következő összefüggés:

$$\mu\boldsymbol{c} + \nu\boldsymbol{a} + \overrightarrow{C'A'} = \boldsymbol{0}$$

$$\overrightarrow{C'A'} = k \cdot \overrightarrow{A'B'} = k[\mu\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} + \lambda(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})].$$

Behelyettesítve és rendezve

$$[\nu - k(\lambda - 1)]\boldsymbol{a} + [\mu + k(\lambda + \mu)]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c}$ lineáris függetlensége folytán

$$\nu - k(\lambda - 1) = 0$$

$$\mu + k(\lambda + \mu) = 0.$$

Innen

$$\nu = \frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda + \mu}.$$

Most már az (1) alatti egyenlőségek folytán

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

$$\frac{BC'}{C'A} = \left|\frac{\nu}{1-\nu}\right| = -\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1+\mu)},$$

$$\frac{CA'}{A'B} = -\frac{1+\mu}{\mu}.$$

Ugyanis:

$0 < \lambda < 1$

$-1 < \mu < 0.$

Összeszorozván ezeket az egyenlőségeket:

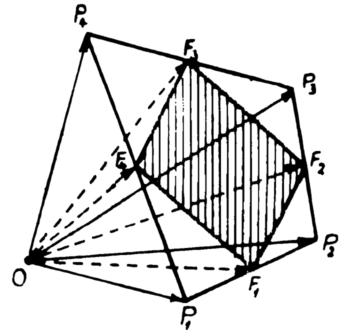
$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{CA'}{A'B} = \frac{AB'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{C'A} = 1.$$

Ebből egyszerű átszorzással

$$AB'\cdot BC'\cdot CA' = A'B\cdot B'C\cdot C'A$$

nyerjük Menelaos tételét.

31. Bizonyítandó: tetszőleges térbeli négyszög (torznégyszög) oldalfelező pontjai egy parallelogramma csúcspontjai.



48. ábra

*

* *

Legyenek a négyszög csúcspontjai P_1, P_2, P_3, P_4, a tér egy tetszőleges pontja O. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{OP_2} = \boldsymbol{r}_2, \quad \overrightarrow{OP_3} = \boldsymbol{r}_3, \quad \overrightarrow{OP_4} = \boldsymbol{r}_4.$$

Ennek megfelelően

$$\overrightarrow{OF_1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) \qquad \overrightarrow{OF_3} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4)$$

$$\overrightarrow{OF_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3) \qquad \overrightarrow{OF_4} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{r}_1)$$

és a felezőpontok által alkotott négyszög oldalvektorai

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{OF_2} - \overrightarrow{OF_1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)$$

$$\overrightarrow{F_2F_3} = \overrightarrow{OF_3} - \overrightarrow{OF_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_2)$$

$$\overrightarrow{F_3F_4} = \overrightarrow{OF_4} - \overrightarrow{OF_3} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)$$

$$\overrightarrow{F_4F_1} = \overrightarrow{OF_1} - \overrightarrow{OF_4} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_4).$$

Innen látható, hogy

$$\overrightarrow{F_1F_2} = -\overrightarrow{F_3F_4}$$

és

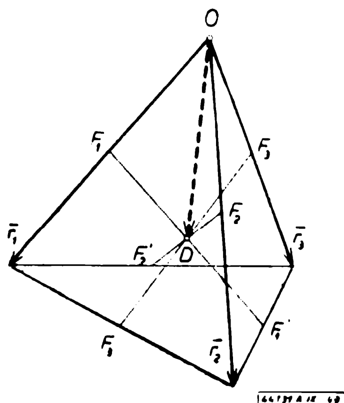
$$\overrightarrow{F_2F_3} = -\overrightarrow{F_4F_1},$$

tehát az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög valóban parallelogramma.

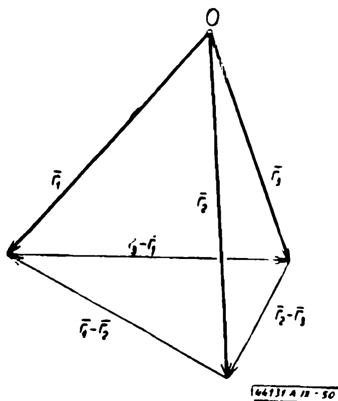
32. Kössük össze egy tetraéder három átellenes oldalpárjának felezőpontjait és bizonyítsuk be, hogy az így nyert három egyenes egy ponton megy át.

*

* *



49. ábra



50. ábra

Legyen a tetraéder O csúcspontjából kiinduló három élvektor: $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$. Ekkor a szemközti oldalvektor-párok:

$$\boldsymbol{r}_1 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3$$

$$\boldsymbol{r}_2 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{r}_3 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

Az összekötendő felezőpontok helyzetvektorai:

$$\overrightarrow{OF_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_1 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OF_1'} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)$$

$$\overrightarrow{OF_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_2 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OF_2'} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_1)$$

$$\overrightarrow{OF_3} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OF_3'} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2).$$

Végül a felezőpontpárok felezőpontjának a helyzetvektora:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}_1 + \overrightarrow{OF'_1}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}_2 + \overrightarrow{OF'_2}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}_3 + \overrightarrow{OF'_3}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)$$

ugyanaz, bármelyik felezőpontpárból számítjuk; ezzel az állítást bizonyítottuk. (Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy állításunk a 31. példa eredményéből is következik!)

*33. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy négy, egy pontból kiinduló vektor végpontjai egy síkon legyenek?

*

* *

Ha az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ vektorok végpontjai egy síkon vannak, akkor a

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}$$

vektorok benne vannak ebben a síkban, következésképpen bármelyikük kifejezhető lineárisan a másik kettővel, pl.:

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}),$$

ahol λ és μ alkalmas skalárok.

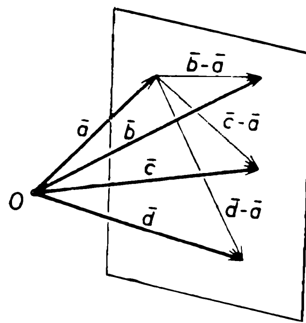
Az összefüggést rendezve

$$(\lambda + \mu - 1)\boldsymbol{a} + (-\lambda)\boldsymbol{b} + (-\mu)\boldsymbol{c} + 1 \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}.$$

Ebből következik, hogy

$$(\lambda + \mu - 1) + (-\lambda) + (-\mu) + 1 = 0$$

és $$(\lambda + \mu - 1)^2 + (-\lambda)^2 + (-\mu)^2 + 1 > 0.$$



51. ábra

A szükséges feltétel tehát a következőképpen hangzik: az egy pontból kiinduló $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ vektorok végpontjai csak akkor lehetnek egy síkon, ha léteznek olyan k, l, m, n számok, hogy

$$\left.\begin{aligned} k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} + m\boldsymbol{c} + n\boldsymbol{d} &= 0 \\ k + l + m + n &= 0 \\ k^2 + l^2 + m^2 + n^2 &> 0 \end{aligned}\right\} \quad (1^*)$$

és

legyen (vö. a 21. feladat (1) feltételeivel).

Az (1*) feltételek elégségessége a következőképpen látható be: a k, l, m, n számok mindegyike nem lehet zérus; ha pl. $k \neq 0$, akkor

$$\boldsymbol{a} = -\frac{l}{k}\boldsymbol{b} - \frac{m}{k}\boldsymbol{c} - \frac{n}{k}\boldsymbol{d} = \frac{l}{l+m+n}\boldsymbol{b} + \frac{m}{l+m+n}\boldsymbol{c} + \frac{n}{l+m+n}\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \frac{(m+n)\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{c} - n\boldsymbol{d}}{l+m+n} \qquad \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = \frac{-l\boldsymbol{b} + (l+n)\boldsymbol{c} - n\boldsymbol{d}}{l+m+n}$$

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} = \frac{-l\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{c} + (l+m)\boldsymbol{d}}{l+m+n}.$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} = -\frac{l}{n}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) - \frac{m}{n}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}),$$

ami pedig azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ vektorok végpontjai valóban egy síkon vannak.

*34. A $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ és $\boldsymbol{p}$ vektorok egy pontból indulnak ki, továbbá

$$\boldsymbol{p} = k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + k_3\boldsymbol{p}_3.$$

Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a négy vektor végpontjai egy síkon legyenek?

*

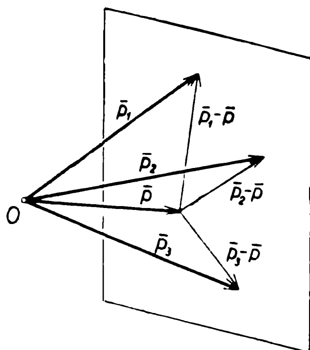
* *

Abból, hogy a négy vektor végpontjai egy síkra esnek, következik, hogy a

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}$$

vektorok egysíkúak, tehát van olyan λ és μ, hogy

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p} = \lambda(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}) + \mu(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}).$$



52. ábra

Beírván $\boldsymbol{p}$ értékét és rendezve

$$\boldsymbol{p}_1 - k_1\boldsymbol{p}_1 - k_2\boldsymbol{p}_2 - k_3\boldsymbol{p}_3 =$$
$$= \lambda(\boldsymbol{p}_2 - k_1\boldsymbol{p}_1 - k_2\boldsymbol{p}_2 - k_3\boldsymbol{p}_3) +$$
$$+ \mu(\boldsymbol{p}_3 - k_1\boldsymbol{p}_1 - k_2\boldsymbol{p}_2 - k_3\boldsymbol{p}_3),$$
$$\boldsymbol{p}_1(1 - k_1 + \lambda k_1 + \mu k_1) +$$
$$+ \boldsymbol{p}_2(-k_2 - \lambda + \lambda k_2 + \mu k_2) +$$
$$+ \boldsymbol{p}_3(-k_3 + \lambda k_3 - \mu + \mu k_3) = \boldsymbol{0}.$$

Ez az egyenlet fennáll, ha a

$$k_1(1 - \lambda - \mu) = 1$$
$$k_2(1 - \lambda - \mu) = -\lambda$$
$$k_3(1 - \lambda - \mu) = -\mu$$

egyenlőségek teljesülnek. Ezeket összegezve a nyert

$$(k_1 + k_2 + k_3)(1 - \lambda - \mu) = 1 - \lambda - \mu$$

egyenlőségből a

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

szükséges feltételt nyerjük.

(Megjegyzés: ha $\lambda + \mu = 1$, akkor $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ és $\boldsymbol{p}_3$ komplanárisak és a feladat elveszti értelmét!)

E feltétel elégségességét az bizonyítja, hogy teljesülése esetén

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p} = (1 - k_1)\boldsymbol{p}_1 + (-k_2)\boldsymbol{p}_2 + (k_1 + k_2 - 1)\boldsymbol{p}_3$$
$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p} = (-k_1)\boldsymbol{p}_1 + (1 - k_2)\boldsymbol{p}_2 + (k_1 + k_2 - 1)\boldsymbol{p}_3$$
$$\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p} = (-k_1)\boldsymbol{p}_1 + (-k_2)\boldsymbol{p}_2 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{p}_3$$

Könnyen belátható, hogy

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p} = -\frac{k_2}{k_1}(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}) + \frac{k_1 + k_2 - 1}{k_1}(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}) = \lambda(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}) + \mu(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}),$$

azaz a négy vektor végpontjai valóban egy síkon vannak.

(Vegyük észre, hogy ez a feladat térbeli analogonja a 22. alatti síkbeli feladatnak!)

*35. Felírandó mindazon vektorok összessége, melyek a tér valamely A pontjából egy megadott

a) gömbfelület,
b) egyenes körhenger felület,
c) egyenes kettős körkúpfelület

tetszőleges pontjába mutatnak.

*
* *

a) Legyen a gömb középpontja C, a gömbfelület tetszőleges pontja P és

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{CP} = \boldsymbol{r},$$

ahol

$$|\boldsymbol{r}| = r \text{ (állandó)}.$$

Nyilván

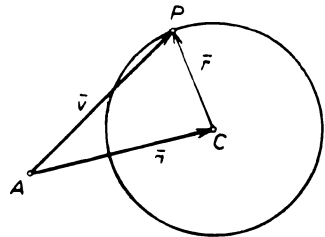
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}.$$

Ha most egy tetszőleges irányú egységvektort $\boldsymbol{e}$-vel jelölünk, akkor

$$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}| \cdot \boldsymbol{e} = r \cdot \boldsymbol{e}$$

és

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + r \cdot \boldsymbol{e}.$$



53. ábra

Kiválasztván most már három nem egy síkba eső, egyébként tetszőleges $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ egységvektort, akkor ezekre mint alapvektorokra

$$\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \nu \boldsymbol{e}_3,$$

ahol

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

tehát

$$\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{1 - \lambda^2 - \mu^2} \cdot \boldsymbol{e}_3,$$

azaz

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + r(\lambda \boldsymbol{e}_1 + \mu \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{1 - \lambda^2 - \mu^2} \cdot \boldsymbol{e}_3).$$

Ebből leolvasható, hogy a gömbfelület tetszőleges pontjának helyzetvektora két valós skaláris paramétertől (λ és μ; $\lambda^2 + \mu^2 \leqq 1$) függ.

b) Legyen a hengerfelület tengelyére merőleges és az A pontot tartalmazó síknak a tengellyel való döféspontja C, a hengerfelület tetszőleges pontja P, a tengely irányába mutató egységvektor $\boldsymbol{e}_1$, továbbá

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{CP} = \boldsymbol{r}.$$

Most is

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r},$$

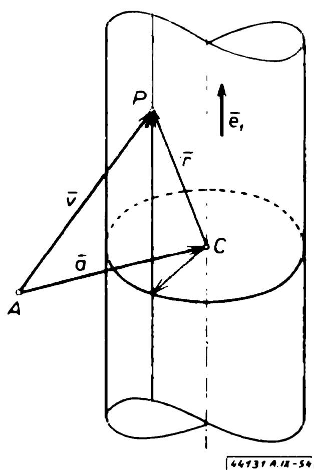
de most

$$\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{e}_1 + \varrho[\mu \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{1-\mu^2} \cdot \boldsymbol{e}_3],$$

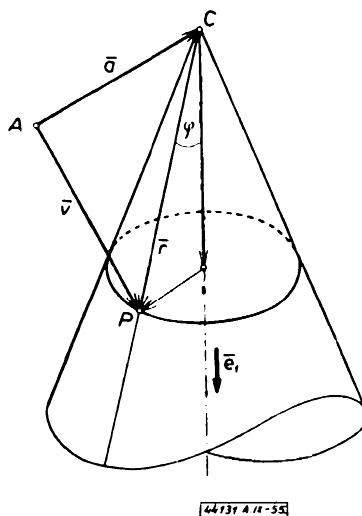
ahol ϱ a henger körének sugara, $\boldsymbol{e}_2$ és $\boldsymbol{e}_3$ pedig a henger tengelyére merőleges síkban felvett tetszőleges, de nem egy egyenesbe eső egységvektorok. Így

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{e}_1 + \varrho[\mu \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{1-\mu^2} \cdot \boldsymbol{e}_3].$$

Látható tehát, hogy a hengerfelület valamely pontjának helyzetvektora szintén két skaláris paramétertől (λ, μ) függ; az egyik (λ) tetszőleges valós szám, a másik (μ) egynél nem nagyobb abszolút értékű valós szám.



54. ábra



55. ábra

c) Legyen a kúpfelület csúcspontja *C*, egy tetszőleges pontja *P*, a tengely irányába mutató egységvektor $\boldsymbol{e}_1$, a tengelyre merőleges síkban fekvő két (nem egy egyenesbe eső) egységvektor $\boldsymbol{e}_2$ és $\boldsymbol{e}_3$, az alkotó hajlásszöge a tengelyhez φ, végül

$$\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{r}, \quad \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{e}_1 + |\lambda| \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot [\mu \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{1-\mu^2} \cdot \boldsymbol{e}_3],$$

vagyis

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{e}_1 + |\lambda| \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot [\mu \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{1-\mu^2} \cdot \boldsymbol{e}_3].$$

A felületi pont helyzetvektora ebben az esetben is két skaláris paramétertől függ.

GYAKORLÓ FELADATOK

α) Síkgeometriai feladatok

1. Az ABC derékszögű háromszög átfogója AB, az átfogóhoz tartozó magasság CH.

a) Mikor egyenlők az AH és BH távolságok?

b) Kifejezendő $\overrightarrow{CH}$ vektor az $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CB}$ és $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CA}$ vektorok segítségével.

c) Kifejezendő CH távolság az $a = |\boldsymbol{a}|$ és $b = |\boldsymbol{b}|$ távolságokkal.

2. Az ABC háromszög γ szögének felezője CD; $CA = b$, $CB = a$. Kiszámítandó CD.

3. Az ABC háromszögben húzzuk meg az $A'B'||AB$ szelőt (A' az AC, B' a BC oldalon fekszik). Igazolandó, hogy ha $AB' = BA'$, akkor a háromszög egyenlőszárú.

4. Vegyük fel a háromszög belsejében az S pontot. Igazolandó, hogy az SAB, SBC, SCA háromszögek területe akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0.$$

Melyik pont az S pont?

*5. Igazolandó, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege úgy aránylik az oldalak négyzetösszegéhez, mint 3 : 4.

Általánosítandó az eredmény arra az esetre is, midőn a súlyvonalak helyett olyan szakaszokról van szó, melyek a csúcspontokból kiindulva a szemközti oldalakat ugyanolyan arányban osztják.

6. Az ABC háromszög A csúcsát összekötjük az A' és A'' pontokkal, melyek a BC oldalt három egyenlő részre osztják. Az $AA' = p_a$ és $AA'' = q_a$ szakaszokat a háromszög a oldalához tartozó oldalharmadolóknak nevezzük. Igazolandó, hogy egy csúcsból kiinduló oldalharmadolók négyzeteinek különbsége egyenlő az ugyanabból a csúcsból kiinduló oldalak négyzetei különbségének harmadával.

7. Fejezzük ki a háromszög T területét csúcsainak $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ helyzetvektoraival.

*8. Vezessük le *Heron* képletét a háromszög területére.

*9. Mutassuk ki, hogy bármilyen ABC háromszögben

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t},$$

ahol t a háromszög területe.

10. Az $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ vektorok párosával merőlegesek. Mutassuk ki, hogy

$$\operatorname{cotg}\alpha : \operatorname{cotg}\beta : \operatorname{cotg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2$$

(α, β, γ az ABC háromszög szögei; $a = |\boldsymbol{a}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$, $c = |\boldsymbol{c}|$).

11. Mutassuk ki, hogy bármilyen négyszögben a szemben fekvő oldalak felezőpontját összekötő vektor egyenlő a másik két oldalvektor összegének a felével (a két összefűzött vektor irányát megfelelően választva). Használjuk fel az eredményt a trapéz középvonalára vonatkozó ismeretes állítás igazolására.

*12. Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalait meghosszabbítva, azok az O pontban metszik egymást. Jelöljük M-mel és N-nel a BD, illetve AC átlók felezőpontjait. Igazolandó, hogy

$$OMN_{\text{terület}} = \frac{1}{4} ABCD_{\text{terület}}.$$

*13 Az $ABCD$ parallelogramma BC és CD oldalain jelöljük ki az M és N pontokat úgy, hogy

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \text{ legyen.}$$

Milyen arányban osztja az AM és BN szakaszokat metszéspontjuk?

*14. Az $ABCD$ négyzetbe írjuk az $MNPQ$ négyszöget (az M, N, P, Q csúcsok rendre az AB, BC, CD, DA oldalakon fekszenek); legyen $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$ (ekkor $\overrightarrow{MB} = \lambda\boldsymbol{a}$ és $\overrightarrow{BN} = \mu\boldsymbol{b}$).

a) Mikor lesz $MNPQ$ négyzet?

b) Mikor lesznek $MNPQ$ oldalai párhuzamosak az $ABCD$ négyzet átlóival?

15. A szabályos sokszög $A_1, A_2, \dots A_n$ csúcsaiból meghúzzuk a sokszög $\boldsymbol{O}$ középpontján átmenő tetszőleges egyenesre merőleges A_kP_k szakaszokat ($k = 1, 2, \dots n$). Igazoljuk, hogy $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P_kA_k} = 0$.

β) Térgeometriai feladatok

16. Egy szabályos háromoldalú gúla (szabályos tetraéder) alapja az ABC háromszög, csúcsa S. Meghatározandó:

a) az $\overrightarrow{AB}$ vektornak az SC egyenes irányába eső összetevője;

b) az $\overrightarrow{SC}$ vektornak az AB egyenes irányába eső összetevője.

17. Igazolandó, hogy az A, B, C, D pontok tetszőleges elhelyezése esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0.$$

Használjuk fel az egyenlőséget a következő állítás igazolására: Ha az $ABCD$ tetraéder A csúcsából kiinduló élek közül kettő merőleges az átellenes élre, akkor a harmadik élpár is merőleges egymásra.

18. Egy tetszőleges tetraéder átellenes élpárainak hosszúságai legyenek

$$a \text{ és } a', \quad b \text{ és } b', \quad c \text{ és } c'.$$

Igazolandó, hogy az a és a' hosszúságú élpár Θ hajlásszögére

$$\cos\Theta = \frac{b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2}{2aa'}.$$

*19. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $OABC$ tetraéder magasságai egy ponton menjenek át?

*20. Fejezzük ki a tetraéder köbtartalmát a hat él hosszúságának segítségével.

21. Kifejezendő az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorok által meghatározott parallelepipedon köbtartalma, ha ismeretes a vektorok hossza és az általuk bezárt szögek:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \gamma, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha, \quad (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \beta.$$

γ) Azonosságok igazolása

22. Igazolandó a következő azonosság és megadandó geometriai jelentése:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

23. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ egy pontból kiinduló vektorok; $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ végpontjai között ugyanakkora a távolság, mint $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ végpontjai között.

Igazolandó, hogy

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

24. Három, nem egy síkba eső $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorral bármilyen $\boldsymbol{m}$ vektor a következőképpen fejezhető ki:

$$\boldsymbol{m} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}.$$

Kiszámítandó az α, β, γ konstansok értéke, ha $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ páronként merőlegesek egymásra.

25. Legyen adva az $ABCD$ téglalap és az M pont. Igazolandó:

a) M-ből a téglalap két nem szomszédos csúcsához húzott vektorok skaláris szorzata egyenlő M-ből a másik két csúcshoz húzott vektorok skaláris szorzatával.

b) Az előbbi két vektorpár négyzetösszege egyenlő.

26. Bizonyítandó, hogy ha az

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$$

vektorok kollineárisak (egy egyenesbe tolhatók el), akkor az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ vektorok komplanárisak (egy síkba tolhatók el).

27. Igazolandó, hogy ha

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d},$$

akkor az

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

vektorok kollineárisak.

28. Ha három nem kollineáris vektor között az

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$$

kapcsolat áll fenn, akkor

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}.$$

Igazoljuk ezt az összefüggést és adjuk meg geometriai jelentését.

29. Mutassuk ki, hogy az

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} \quad \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2} \quad \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2}$$

egyes szorzat negyedrésze az $\boldsymbol{abc}$ vegyes szorzatnak és adjuk meg az összefüggés geometriai jelentését.

*30. Igazolandó a következő azonosság:

$$(\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}+\nu_1\boldsymbol{c})(\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}+\nu_2\boldsymbol{c})(\lambda_3\boldsymbol{a}+\mu_3\boldsymbol{b}+\nu_3\boldsymbol{c}) =$$

$$= \boldsymbol{abc}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1\mu_1\nu_1\\ \lambda_2\mu_2\nu_2\\ \lambda_3\mu_3\nu_3\end{vmatrix}.$$

*31. Igazolandó, hogy a

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b},\qquad \nu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{c},\qquad \mu\boldsymbol{c}-\nu\boldsymbol{a}$$

vektorok komplanárisok.

*32. Igazolandók a következő azonosságok:

a) $\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})] = (\boldsymbol{bd})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$,

b) $\boldsymbol{p}\times[\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})] = (\boldsymbol{prs})\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{pq})(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})$,

c) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{axy} & \boldsymbol{bxy}\\ \boldsymbol{auv} & \boldsymbol{buv}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{xuv} & \boldsymbol{yuv}\\ \boldsymbol{abx} & \boldsymbol{aby}\end{vmatrix}$.

*33. Igazolandók a következő azonosságok:

a) $[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})][(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})] = (\boldsymbol{abc})^4$.

b) Ha

$$\boldsymbol{m} = [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\times[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]$$
$$\boldsymbol{n} = [(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]\times[(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]$$
$$\boldsymbol{p} = [(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]\times[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})],$$

akkor $\boldsymbol{mnp} = 16(\boldsymbol{abc})^4$.

*34. Igazolandó a következő azonosság:

$$(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bcd}).$$

*35. Kiszámítandó az $\boldsymbol{abc}$ és $\boldsymbol{xyz}$ vegyes szorzatok szorzata.

*36. Határozzuk meg $\boldsymbol{x}$-et a következő vektor-egyenletből:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}).$$

δ) Analitikus geometriai feladatok síkban

37. Az egyenes normálegyenlete

$$\boldsymbol{rn}_0 - p_0 = 0,$$

ahol $\boldsymbol{r}$ az egyenes tetszőleges pontjának helyzetvektora, $\boldsymbol{n}_0$ az az egységvektor, mely az egyenes és a kezdőpont síkjában az egyenesre merőlegesen a kezdőponttól az egyenes felé irányul, p_0 pedig az egyenes távolsága a kezdőponttól.

Mi a feltétele annak, hogy az

$$\boldsymbol{rn}_0 - p_0 = 0$$

egyenes az

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^2 = a^2$$

kört érintse?

38. Ha $\boldsymbol{r}$ egy egyenes tetszőleges pontjának helyzetvektora, $\boldsymbol{a}_0$ pedig az egyenes irányát jelző egységvektor, akkor az egyenes egyenlete az

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{M}$$

alakban írható, ahol $\boldsymbol{M}$ csakis az egyenes helyzetétől és irányításától függő konstansvektor.

Igazolandó, hogy ha az

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{M} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{M}'$$

egyenesek metszik egymást, akkor

$$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{M} = 0.$$

39. Felírandó annak az egyenesnek az egyenlete, amely átmegy az $A(\boldsymbol{r}_1)$ ponton és egyenlő távol van a $B(\boldsymbol{r}_2)$ és $C(\boldsymbol{r}_3)$ pontoktól.

40. Egy háromszög csúcspontjai és azok helyzetvektorai: $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$, $C(\boldsymbol{r}_3)$. Felírandó a három magassági vonal egyenlete, és igazolandó, hogy a három magassági vonal egy pontban metszi egymást.

*41. Egy háromszög csúcspontjai és azok helyzetvektorai: $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$, $C(\boldsymbol{r}_3)$. Felírandó a három oldalfelező merőleges egyenlete és igazolandó, hogy az oldalfelező merőlegesek egy ponton mennek át.

*42. Adva van két pont: $A(\boldsymbol{r}_1)$, és $B(\boldsymbol{r}_2)$.

Megkeresendő azon $P(\boldsymbol{r})$ pontok mértani helye, melyekre nézve az $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ skalárszorzat megadott c konstans.

*43. Mutassuk ki, hogy az

$$\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{m}\boldsymbol{r} = c \qquad \begin{aligned}(\boldsymbol{m} &= \text{állandó vektor}\\ c &= \text{állandó szám,}\end{aligned}$$

egyenlettel jellemzett görbe kör. Határozzuk meg középpontját és sugarát.

*44. Felírandó a kör egyenlete, ha ismerjük egyik átmérője két végpontját.

A megadott pontok: $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$.

ε) *Analitikus geometriai feladatok térben*

45. Jelöljük egy sík tetszőleges pontjának helyzetvektorát $\boldsymbol{r}$-rel, a síknak a kezdőponttól való távolságát p_0-val és a kezdőpontból a sík felé irányuló, a síkra merőleges egységvektort $\boldsymbol{n}_0$-val, akkor a sík egyenlete

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0 = p_0.$$

Meghatározandó a kezdőpontból az

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0 = p_0 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0' = p_0'$$

síkok metszésvonalára bocsátott merőleges talppontja.

46. Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ lineárisan független (nem komplanáris) vektorok egy pontból indulnak ki. Kimutatandó, hogy a végpontjaikra illeszkedő sík merőleges az

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

vektorra.

47. A tetraéder alapja az $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$, $C(\boldsymbol{r}_3)$ pontokkal megadott háromszög. Felírandó az alappal párhuzamos és a tetraéder csúcspontján átmenő sík egyenlete.

48. Meghatározandó azon pontok geometriai helye, melyek az $A(\boldsymbol{r}_1)$ és $B(\boldsymbol{r}_2)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak.

*49. Legyen adva két pont: $A(\boldsymbol{r}_1)$ és $B(\boldsymbol{r}_2)$. Meghatározandó azon $P(\boldsymbol{r})$ pontok mértani helye, melyekre nézve az

$$\frac{AP}{BP} = \lambda \quad \text{arány megadott érték.}$$

Értelmezzük a nyert egyenletet síkban és térben is.

*50. Milyen felületet határoz meg a

$$[\boldsymbol{t}_0\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}_0)]^2 = \varrho^2$$

egyenlet, ahol $\boldsymbol{t}_0$ állandó egységvektor, $\boldsymbol{r}$ egy tetszőleges felületi pont helyzetvektora és ϱ állandó szám?

2. §. ANALITIKUS GEOMETRIAI FELADATOK VEKTORALGEBRAI MEGOLDÁSA (KOORDINÁTÁKKAL)

A vektoralgebra segítségével könnyen és elegánsan tárgyalható sok olyan térmértani feladat, amely pontokkal, egyenesekkel és síkokkal kapcsolatos.

Ezek a feladatok néhány alapesetre vezethetők vissza.

A következőkben ezeket az alapfeladatokat mutatjuk be.

a) Pontok helyzete és távolsága

A tér minden pontjához kölcsönösen és egyértelműen hozzárendelhető egy vektor, amely a koordinátarendszer kezdőpontjából a szóbanforgó pontba mutat. Ennek az ún. *helyzetvektornak* derékszögű koordinátái azonosak a pont derékszögű koordinátáival.

Az a $\boldsymbol{v}$ vektor, amely a tér P_1 pontjából a P_2 pontba mutat, az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ helyzetvektorokkal nyilván a következőképpen fejezhető ki:

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_2,$$

azaz

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,$$

tehát koordinátái:

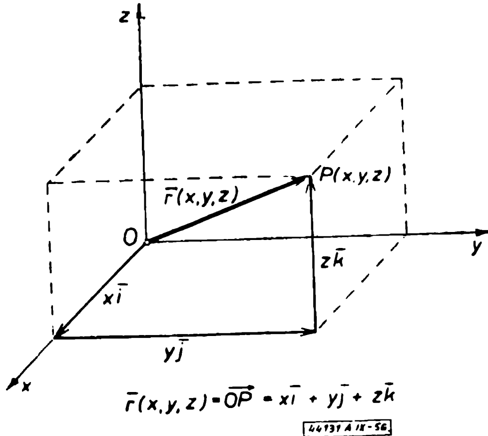
$$a = x_2 - x_1$$
$$b = y_2 - y_1$$
$$c = z_2 - z_1.$$

A két pont távolsága ennek a vektornak abszolút értéke, azaz

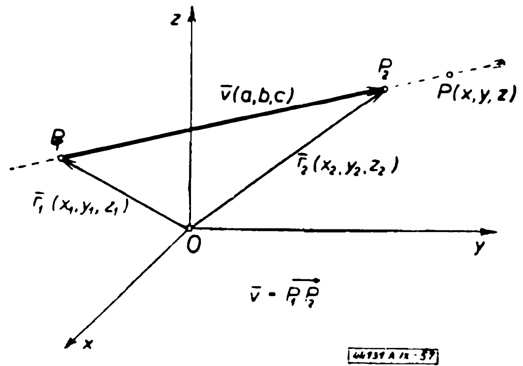
$$d = |\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Könnyen belátható az is, hogy minden olyan P pontra nézve, mely rajta van a P_1-en és P_2-n áthaladó egyenesen, a $\overrightarrow{P_1P}$ vektor csak állandó szorzóban különbözik a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektortól, azaz

$$\overrightarrow{P_1P} = t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = t \cdot \mathbf{v}.$$



56. ábra



57. ábra

t pozitív, illetve negatív aszerint, hogy P a P_1-től a P_2 felé esik, vagy ellenkezőleg; továbbá

$$|t| \gtrless 1, \quad \text{ha} \quad |\overrightarrow{P_1P}| \gtrless |\overrightarrow{P_1P_2}|.$$

Pontosan (a P pont koordinátáit x, y, z-vel jelölve):

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

feltéve, hogy a nevezők egyike sem zérus.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$|t| = \frac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$$

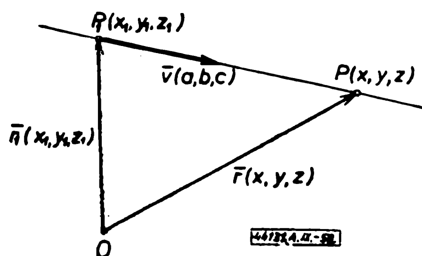
és hogy ezeknek a távolságoknak a koordinátatengelyekre való párhuzamos vetítésével az arány nem változik.

b) Az egyenes egyenlete

Az egyenes egyenletének felírásához ismernünk kell egy pontjának koordinátáit és az egyenes irányát, azaz egy olyan vektor koordinátáit (az ún. *irányvektorét*), amely az egyenessel párhuzamos. Akkor is ezeket az értékeket állapítjuk meg először, ha az egyenes más adataival van megadva.

(Itt és a továbbiakban csak a koordinátarendszer kezdőpontját tüntetjük fel.)

Legyen tehát adott az egyenes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pontja és $v(a, b, c)$ irányvektora.



58. ábra

Az egyenes bármely $P(x, y, z)$ pontjára (és csak azokra) érvényes a következő összefüggés:

$$\overrightarrow{P_1P} \times v = 0 \text{ (mert párhuzamosak)}$$

de

$$\overrightarrow{P_1P} = r - r_1,$$

tehát

$$(r - r_1) \times v = 0.$$

Ez az egyenes vektoregyenlete, amely egyértelműen megadja az egyenes bármely pontjának (és csak azoknak) helyzetvektorát.

Ahhoz, hogy ezt az összefüggést gyakorlati számításokhoz alkalmas alakra hozzuk, a vektorokat koordináták segítségével kell kifejeznünk.

$$r - r_1 = (x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k,$$

$$v = ai + bj + ck,$$

$$(r - r_1) \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= i[(y - y_1)c - (z - z_1)b] - j[(x - x_1)c - (z - z_1)a] +$$

$$+ k[(x - x_1)b - (y - y_1)a] = 0.$$

Mivel egy vektor akkor és csak akkor zérusvektor, ha mindegyik koordinátája zérus, írható:

$$(y - y_1)c - (z - z_1)b = 0$$
$$(z - z_1)a - (x - x_1)c = 0$$
$$(x - x_1)b - (y - y_1)a = 0.$$

Ez a három egyenlet némi rendezéssel a következőképpen foglalható össze:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Ezt az összefüggést — amelyet az egyenes tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjának koordinátái (és csak azok) kielégítenek — az egyenes *skaláris egyenletrendszerének* nevezzük. Nem használható azonban akkor, ha a v vektor koordinátái közül bármelyik zérus! Éppen ezért az egyenes egyenletének egy más — ebben az esetben is használható — alakját is felírjuk.

Az ábrából leolvasható, hogy

$$r = r_1 + \overrightarrow{P_1P}.$$

Minthogy

$$\overrightarrow{P_1P} = tv,$$

azért

$$r = r_1 + tv,$$

ahol t egy, a P pont helyzetétől függő konstans (az ún. *paraméter*); ha t végigfut minden valós értéken $-\infty$ és $+\infty$ között, ez a (vektor-) egyenlet megadja az egyenes valamennyi pontjának (és csak azoknak) helyzetvektorait, tehát ez az összefüggés is az egyenes egyenlete, az ún. *paraméteres* alak.

Mármost koordinátás alakba átírva

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x_1 + at)\mathbf{i} + (y_1 + bt)\mathbf{j} + (z_1 + ct)\mathbf{k}.$$

Mivel két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha koordinátáik megegyeznek, kapjuk:

$$x = x_1 + at$$
$$y = y_1 + bt$$
$$z = z_1 + ct.$$

Ezt a három egyenletet nevezzük az egyenes *paraméteres skaláris* egyenletrendszerének; akkor is használható, ha a $\mathbf{v}$ vektor valamelyik koordinátája zérus. Vegyük észre, hogy a t paramétert mindhárom egyenletből kifejezve és a kapott értékeket egymással egyenlővé téve megkapjuk az egyenes előbb felírt skaláris egyenletrendszerét. (Feltesszük, hogy $abc \neq 0$.)

Az, hogy az egyenes egyenletének, illetve egyenletrendszerének melyik alakját használjuk, a feladat természetétől függ. Itt jegyezzük meg, hogy az egyenes szimbolikus jelzésére néha az $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v})$ jelzést is használják; $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{v}$ jelentése fentiek után nyilvánvaló.

c) A sík egyenlete

A sík egyenletének felírásához ismernünk kell a sík egy pontjának koordinátáit és a sík állását, azaz egy olyan vektor koordinátáit (az ún. *normál vektorét*), amely merőlegesen áll a síkra. Ezeket az értékeket kell megkeresnünk akkor is, ha a sík más adataival van megadva.

Legyen tehát adott a sík $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pontja és $\mathbf{n}(A, B, C)$ normálvektora. A sík bármelyik $P(x, y, z)$ pontjára (és csak azokra) érvényes a következő összefüggés:

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (mert merőlegesek egymásra);}$$

de

$$\overrightarrow{P_1P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1,$$

tehát

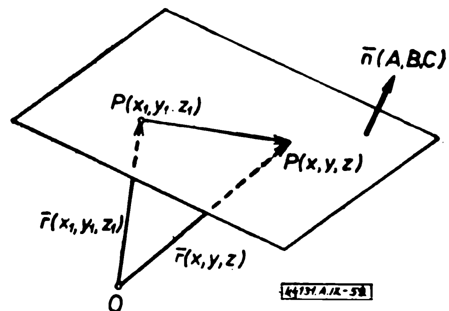
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{n} = 0.$$

Ez a *sík vektoregyenlete*. Koordinátás alakban írva

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + $$
$$+ (z - z_1)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

a skaláris szorzat ismert kifejtésével kapjuk a *sík skaláris egyenletét*:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$



59. ábra

Ez beszorzással és a konstansok összevonásával még a következő alakban is írható:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

ahol

$$D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = -\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}.$$

Itt jegyezzük meg, hogy ha egy vektor csak egy irány jelzésére szolgál (ilyen pl. a sík normálvektora és az egyenes irányvektora), akkor hossza közömbös; ez azt jelenti, hogy egy irányt jelző vektort tetszés szerint nyújthatunk vagy zsugoríthatunk: koordinátáit végigszorozhatjuk egy tetszőleges pozitív λ számmal. A pozitív előjelet azért hangsúlyoztuk, mert egy vektornak irányán kívül irányítása (állása) is van; abban az esetben azonban, ha az irányítás nem lényeges — mint a térmértani feladatok legnagyobb részében — λ előjele negatív is lehet. Megjegyezzük még azt is, hogy az irányt jelző vektorok *szabad vektorok*, azaz kezdőpontjuk nincs a sík, illetve egyenes valamely pontjában rögzítve.

A sík egyenletének speciális alakjához jutunk el, ha a normálvektort egységnyi hosszúnak választjuk, azaz egyenletünkben $\boldsymbol{n}$ helyett

$$\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \boldsymbol{e}_n\text{-et írunk,}$$

továbbá irányát úgy szabjuk meg, hogy a koordinátarendszer kezdőpontjától a sík felé mutasson. Ebben az esetben a sík vektoregyenlete

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{e}_n = 0,$$

vagy

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{e}_n = 0.$$

Vegyük észre, hogy $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_n$ — és természetesen $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{e}_n$ is — a síknak a kezdőponttól mért távolságát adja (mert $\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_n$ éppen $\boldsymbol{r}$-nek a normálvektor irányába eső merőleges vetületét jelenti, a normálvektor iránya pedig egyezik a kezdőpontból a síkra bocsátott merőleges irányával), mégpedig az egység-normálvektor kikötött iránya miatt pozitív előjellel.

Ez azért fontos, mert az egyenletet skaláris alakban

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

írva beláthatjuk, hogy a konstans tag abszolút értéke éppen a síknak a kezdőponttól mért távolsága pozitív mérőszámát adja. Ezt a távolságot p-vel jelölve:

$$p = \left| \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right| .$$

Azért, hogy az egység-normálvektor irányításával kapcsolatos — és a továbbiakban fontos — kikötésünkkel összhangban maradjunk, ügyeljünk arra, hogy az egyenlet konstans tagja feltétlenül negatív legyen, ami mindig elérhető, hiszen az egyenlet mindkét oldalát megszorozhatjuk -1-gyel. Ezt a következő jelöléssel juttathatjuk kifejezésre:

$$-(\underset{+}{sg}\, D)\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0,$$

ahol a négyzetgyök pozitív előjellel veendő (annál is inkább, mert egy vektor hosszát jelenti) és

$$sg\,D = \begin{cases} +1, & \text{ha} \quad D > 0 \\ -1, & \text{ha} \quad D < 0 \end{cases}$$ (olvasandó: „szignum dé").

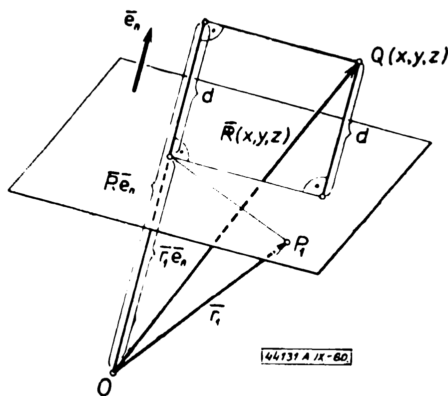
A síknak így felírt egyenletét *Hesse-féle* (vagy normál-) egyenletnek nevezzük.

A normál-alak igen hasznosnak bizonyul, ha egy pontnak a síktól való távolságát akarjuk megállapítani.

Az ábrából leolvashatóan ugyanis

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{e}_n = d,$$

így tehát, ha a sík normálegyenletében x, y és z helyébe valamely, a síkon kívül fekvő $Q(X, Y, Z)$ pont koordinátáit írjuk, az egyenlet jobb oldala nem zérus lesz, hanem éppen a pontoknak a síktól való távolságát adja. Az előjel pozitív vagy negatív lesz aszerint, hogy a Q pont a térben a síktól a kezdőponttal ellentétes vagy egyező irányban fekszik. Képletben:

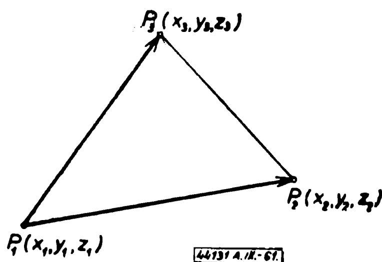


60. ábra

$$d = -(sg\,D)\frac{AX + BY + CZ + D}{\underset{+}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

d) Területfeladatok

Egyenesszakaszokkal határolt síkfelületek területének kiszámítása síkháromszögek területének kiszámítására vezethető vissza. Síkháromszögek területének vektoralgebrai módszerrel történő megállapítását az a tény teszi lehetővé, hogy a két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által „kifeszített" parallelogramma területének mérőszámát adja; ez éppen kétszerese a két vektor által meghatározott háromszög területének.



61. ábra

A háromszög területének megállapítása végett tehát kiválasztjuk a háromszög egyik csúcspontját és a háromszög ebből kiinduló oldalait vektoroknak fogva fel, kiszámítjuk vektoriális szorzatukat. A vektoriális szorzat abszolút értékének fele adja meg a háromszög területének mérőszámát.

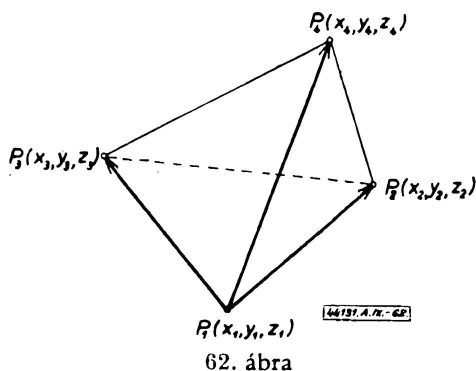
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_3 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_3 - z_1)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix}\right\|.$$

e) Térfogatszámítás

Síklapokkal határolt testek térfogatának kiszámítása tetraéderek térfogatának kiszámítására vezethető vissza. Tetraéderek térfogatának vektoralgebrai módszerrel történő kiszámítása azon a tényen alapul, hogy három vektor vegyes szorzatának abszolút értéke a három vektor által „kifeszített" parallelepipedon térfogatának mérőszámával egyenlő; ez hatszor akkora, mint a három vektor által meghatározott tetraéder térfogata.



62. ábra

A tetraéder térfogatának megállapítása végett tehát kiválasztjuk annak egyik csúcspontját, és a tetraéder ebből kiinduló három élét vektoroknak fogva fel, kiszámítjuk vegyes szorzatukat. A vegyes szorzat abszolút értékének egyhatoda adja meg a tetraéder térfogatának mérőszámát.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_3 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_3 - z_1)\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{P_1P_4} = (x_4 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_4 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_4 - z_1)\boldsymbol{k}$$

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{P_1P_2}\,\overrightarrow{P_1P_3}\,\overrightarrow{P_1P_4}| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix}\right\|$$

f) Hajlásszögek

Hajlásszögekre vonatkozó feladatokkal kapcsolatban elég azt tudnunk, hogy azokat vektorok hajlásszögére vezetjük vissza. Az egyenes helyett tehát irányvektorát, a sík helyett pedig normálvektorát, illetve a megfelelő egységvektorokat használjuk fel. (Mint tudjuk, két egységvektor skaláris szorzata a vektorok hajlásszögének cosinusát adja meg.)

MINTAPÉLDÁK

A bemutatott alapfeladatok ismerete elég ahhoz, hogy összetettebb feladatokat is meg tudjunk oldani. Mielőtt azonban ezekre rátérnénk, az elmondottakat néhány egyszerű példával világítjuk meg.

1. Mi a következő pontoknak egymástól való távolsága:

$$P_1(2,\ 0,\ 3)$$
$$P_2(-5,\ 1,\ 7)?$$

* * *

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-5 - 2)\boldsymbol{i} + (1 - 0)\boldsymbol{j} + (7 - 3)\boldsymbol{k} = -7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k};$$
$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{66}.$$

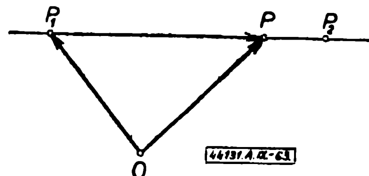
2. Mik a koordinátái annak a $P(x, y, z)$ pontnak, amely rajta van a P_1-en és P_2-n áthaladó egyenesen és amely a P_1P_2 távolságot 7 : 2 arányban osztja?

* * *

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2},$$

ahol

$$|t| = \frac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$$



63. ábra

és $t > 0$, mert P a P_1-től a P_2 irányába esik, tehát

$$t = \frac{7}{9}.$$

Ha P_1 és P_2 koordinátái ugyanazok, mint az előző példában, akkor

$$\overrightarrow{OP_1} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k} + \frac{7}{9}(-7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) =$$

$$= \left(2 - \frac{49}{9}\right)\boldsymbol{i} + \left(0 + \frac{7}{9}\right)\boldsymbol{j} + \left(3 + \frac{28}{9}\right)\boldsymbol{k}.$$

A P pont koordinátái tehát

$$x = 2 - \frac{49}{9} = -\frac{31}{9}$$

$$y = \frac{7}{9}$$

$$z = 3 + \frac{28}{9} = \frac{55}{9}.$$

Ezt a feladatot általánosságban megoldva (az arányt $m : n$-nel jelölve) kapjuk az analitikus geometriából is ismert képleteket:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \quad y = \ldots, \quad z = \ldots$$

Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

3. Mik a koordinátái a P_2 pont P_1-re vonatkozó tükörképének? (A számadatok legyenek ugyanazok, mint az első példában.)

* * *

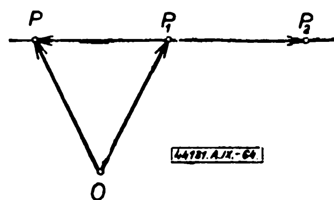
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2};$$

itt most $t = -1$, tehát

$$\overrightarrow{OP} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k} - (-7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}).$$

A tükörpont koordinátái tehát

$$x = -9$$
$$y = -1$$
$$z = -1.$$



64. ábra

4. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely átmegy a P_1 (2, −3, 5) ponton és irányát a $\mathbf{v}$ (4, 1, −2) vektor jelzi? Jelöljünk ki ezen az egyenesen néhány, egymástól egyenlő távolságra eső pontot!

* * *

Most

$$x_1 = 2 \qquad a = 4$$
$$y_1 = -3 \qquad b = 1$$
$$z_1 = 5 \qquad c = -2,$$

tehát a keresett egyenes egyenlete:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-2 & y+3 & z-5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Az egyenes egyenletrendszere (skaláris alak):

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

Paraméteres alakban;

$$x = 2 + 4t$$
$$y = -3 + t$$
$$z = 5 - 2t.$$

Egyenlő hosszú szakaszoknak valamely koordinátatengelyre való merőleges vetületei is egyenlők; egyenlő távolságra eső pontok koordinátáit úgy kapjuk, hogy a paraméteres egyenletrendszerben t értékét mindig ugyanannyival növeljük. Legyen pl.

$$t = 1,\ 4,\ 7,\ 10 \text{ stb.}$$

a megfelelő pontok:

$$P_2(6, -2, 3),\quad P_3(18, 1, -3),\quad P_4(30, 4, -9),\quad P_5(42, 7, -15) \text{ stb.}$$

5. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a P_1(5, 1, −8) ponton megy át és a z tengellyel párhuzamos?

* * *

A z tengely irányát a $\mathbf{k}$(0, 0, 1) egységvektor jelzi; a párhuzamosság miatt ugyanez lehet a keresett egyenes irányvektora is. Most csak a paraméteres egyenletrendszer írható fel:

$$x = 5$$
$$y = 1$$
$$z = -8 + t.$$

6. Állapítsuk meg a

$$\frac{2x+3}{5} = -y = \frac{1-4z}{7}$$

egyenes irányvektorának, valamint egy pontjának koordinátáit!

* * *

Az egyenes egyenletét az

$$\frac{x-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{5}{2}} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-\frac{1}{4}}{-\frac{7}{4}}$$

alakba írva, azonnal leolvashatók a kívánt adatok:

$$P_1\left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{5}{2}, -1, -\frac{7}{4}\right).$$

7. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a koordinátarendszer kezdőpontját tartalmazza és normálvektora:

$$\boldsymbol{n}(1, 2, 4).$$

* * *

Mivel most $x_1 = y_1 = z_1 = 0$,
a sík egyenlete:

$$x + 2y + 4z = 0.$$

(Figyeljük meg, hogy a kezdőponton átmenő sík egyenletében a konstans zérus.)

8. Mi az egyenlete annak a síknak, amelynek egy pontja: $P_0(-2, 3, 7)$ és amely merőleges az $x = y = z$ egyenesre?

* * *

A merőlegesség folytán a sík normálvektorának vehető az egyenes irányvektora:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}(1, 1, 1);$$

tehát a sík egyenlete

$$1(x+2) + 1(y-3) + 1(z-7) = 0$$

vagy rendezve

$$x + y + z - 8 = 0.$$

A feladat általános megoldásának felírásánál legyen az adott pont: $P_0(x_0, y_0, z_0)$, az adott egyenes

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}.$$

A keresett sík egyenlete ekkor

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$

9. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a

$$P_0\left(5,\ -\frac{3}{2},\ 0\right)$$

pontra illeszkedik és párhuzamos a

$$3x - y + \frac{5}{3}z - 1 = 0$$

síkkal?

* * *

A párhuzamosság miatt a keresett sík normálvektora ugyanaz, mint a megadotté, azaz

$$\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \frac{5}{3}\boldsymbol{k}.$$

A keresett sík egyenlete tehát

$$3(x-5) - \left(y + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{3}(z-0) = 0,$$

vagy rendezve

$$18x - 6y + 10z - 99 = 0.$$

Általános megoldás:

adott pont .... $P_0(x_0, y_0, z_0)$
adott sík .... $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$
keresett sík .... $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$

10. Mi az egyenlete az (yz) koordinátasíknak?

* * *

Mivel ez a sík tartalmazza a kezdőpontot és irányát az x tengely jelöli ki, meghatározó adatai:

$$P_1\ (0,\ 0,\ 0)$$
$$\boldsymbol{n}\ (1,\ 0,\ 0)$$

és így az egyenlet:

$$x = 0,$$

amint az nyilvánvaló.

11. Milyen messze van a koordinátarendszer kezdőpontjától a

$$2(x-3) - 3(y+1) + z + 17 = 0$$

sík és milyen messze van e síktól a

$$Q(2,\ -1,\ 4) \text{ pont?}$$

* * *

A sík egyenletét normálalakba írjuk, ezért először is rendezzük:

$$2x - 3y + z + 8 = 0.$$

Mivel

$$A = 2, \quad B = -3, \quad C = 1, \quad D = 8,$$

a normálalak:

$$\frac{-2x + 3y - z - 8}{\sqrt{14}} = 0.$$

A kezdőponttól való távolság a konstans tag abszolút értéke, tehát

$$p = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

A Q pont távolsága a síktól

$$d = \frac{-2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 4 - 8}{\sqrt{14}} = -\frac{19}{\sqrt{14}}.$$

Mivel a kapott érték negatív, a Q pont a sík által kettéválasztott térnek abban a felében van, amely a kezdőpontot tartalmazza.

12. Mi a területe annak a háromszögnek, melynek csúcspontjai:

$$P_1(2, 1, 7), \quad P_2(-3, 0, 5), \quad P_3(0, 4, -1).$$

* * *

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}.$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -5 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(8+6) - \boldsymbol{j}(40-4) + \boldsymbol{k}(-15-2) =$$

$$= 14\boldsymbol{i} - 36\boldsymbol{j} - 17\boldsymbol{k}.$$

$$t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 36^2 + 17^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1781} \text{ területegység.}$$

13. Mi a térfogata annak a tetraédernek, melynek egyik csúcspontja a koordinátarendszer kezdőpontja, a másik három pedig:

$$P_1(-2, 2, 3)$$
$$P_2(0, 2, -1)$$
$$P_3(4, 0, 1).$$

* * *

A tetraéder egy csúcspontból kiinduló élvektorainak válasszuk az

$$\overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{r}_1 = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{OP_3} = \boldsymbol{r}_3 = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

vektorokat. Ezeknek vegyes szorzata

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 2 - 2\cdot 4 + 3\cdot(-8) = -36.$$

A tetraéder térfogata e vegyes szorzat abszolút értékének egyhatoda, tehát

$$V = \frac{1}{6}\left|\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3\right| = 6 \text{ térfogategység.}$$

14. Mi a hajlásszöge a következő egyeneseknek:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3}.$$

$$x = t$$
$$y = 2t - 3$$
$$z = -5.$$

* * *

Az egyenesek hajlásszöge irányvektoraik hajlásszögével egyezik. Az irányvektorok:

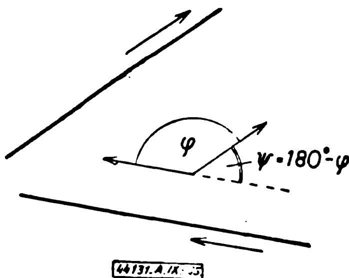
$$\boldsymbol{v}_1\left(3,\ \frac{5}{2},\ -3\right)$$

$$\boldsymbol{v}_2\,(1,\ 2,\ 0).$$

Mivel két vektor hajlásszögének cosinusa a megfelelő egységvektorok skaláris szorzatával egyenlő, azért írható, hogy

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}\cdot\frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} = \frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|} = \frac{3\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 2 - 3\cdot 0}{\sqrt{3^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\frac{485}{4}}} = \frac{16}{\sqrt{485}}.$$



65. ábra

Ebből φ értéke már könnyen megállapítható. Megjegyezzük, hogy adott esetben φ tompaszög is lehet, ami nem meglepő, ha meggondoljuk, hogy az egyeneseknek irányítást is tulajdonítunk. Ha ettől eltekintünk és csak a két egyenes által alkotott hegyesszög érdekel, akkor a kapott (tompa) szög kiegészítő szögét kell vennünk.

Ennek értékét a

$$\cos\psi = \frac{|\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}$$

összefüggés adja meg.

15. Milyen szög alatt hajlik az

$$x = 2t - 5$$
$$y = -t + 1$$
$$z = 3t - 6$$

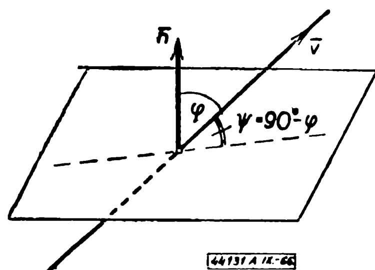
egyenes a

$$2x + y - 3z + 5 = 0$$

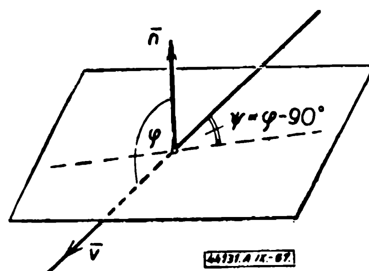
síkhoz?

* * *

Az egyenes és sík hajlásszögén az egyenesnek a síkon való vetületével alkotott hegyesszögét értjük.



66. ábra



67. ábra

Az ábrán látható, hogy ez a (ψ) hajlásszög milyen összefüggésben van az egyenes irányvektora és a sík normálvektora által alkotott (φ) szöggel:

Ha az $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{v}$ által alkotott φ szög hegyesszög, akkor a hajlásszög

$$\psi = 90° - \varphi, \text{ tehát } \sin\psi = \cos\varphi > 0;$$

ha az $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{v}$ által alkotott φ szög tompaszög, akkor a hajlásszög

$$\psi = \varphi - 90°, \text{ tehát } \sin\psi = -\cos\varphi > 0.$$

Mindkét esetet magábanfoglalja a következő képlet:

$$\sin\psi = \frac{|\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{v}|}.$$

Példánkban

$$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},$$

tehát

$$\sin\psi = \frac{|4 - 1 - 9|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{7}.$$

Ebből ψ értéke már könnyen megállapítható.

* * *

Az alábbiakban bemutatandó példák a már tárgyalt egyszerű elemekből tevődnek össze és ha azokat jól megértettük, ezek megoldása sem fog nagyobb nehézséggel járni.

16. Meghatározandó az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{6}$$

egyenes és a

$$2x + 3y - z - 6 = 0$$

sík döféspontja.

* * *

Itt célszerű az egyenes egyenletrendszerét paraméteres alakban írni:

$$x = 2t + 1$$
$$y = 3t - 2$$
$$z = 6t + 4.$$

A kérdés most így is fogalmazható: mi a t paraméternek azon értéke, mely az egyenesnek olyan pontját szolgáltatja, amely a sík egyenletét is kielégíti?

Ezt az értéket T-vel jelölve

$$2(2T + 1) + 3(3T - 2) - (6T + 4) - 6 = 0,$$

ahonnan

$$T = 2,$$

és így a döféspont koordinátái

$$X = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$Y = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$
$$Z = 6 \cdot 2 + 4 = 16.$$

Oldjuk meg a feladatot a vektoralgebra módszereivel általánosságban is!

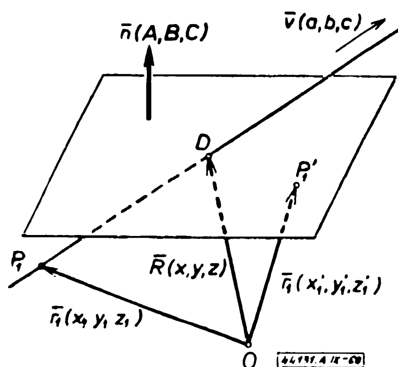
Az egyenes egyenlete:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{v}.$$

A sík egyenlete:

$$(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_1')\boldsymbol{n} = 0.$$

A döféspont $\boldsymbol{R}$ helyzetvektora kielégíti mind a két egyenletet (de ekkor t helyett már a döféspontnak megfelelő T érték írandó), tehát



68. ábra

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + T\boldsymbol{v}$$
$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_1')\boldsymbol{n} = 0.$$

T értékét $\boldsymbol{R}$ kiküszöbölésével számíthatjuk ki:

$$(\boldsymbol{r}_1 + T\boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}_1')\boldsymbol{n} = 0$$
$$T\boldsymbol{v}\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n} = 0$$
$$T = \frac{(\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}}$$

és így

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}.$$

Ha példánkat ezzel a képlettel akarjuk megoldani, szükségünk van a sík valamely P_1' pontjának koordinátáira (helyzetvektorára). Ezek azonban könnyen megállapíthatók, mert kettő közülük szabadon választható, a harmadik pedig a sík egyenlete segítségével kiszámítható. Legyen pl. $x_1' = 0$, $y_1' = 0$, akkor a sík

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

egyenletéből

$$z_1' = -\frac{D}{C}.$$

Egyszerűbb a számítás, ha a sík egyenlete az

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

alakban van adva, mert akkor a sík egy pontjának koordinátái közvetlenül olvashatók le.

Fenti példánk adatai:

$$\boldsymbol{r}_1(1,\ -2,\ 4),\quad \boldsymbol{v}(2,\ 3,\ 6)$$

$$\boldsymbol{r}_1'(0,\ 0,\ -6),\quad \boldsymbol{n}(2,\ 3,\ -1).$$

Ebből

$$(\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n} = 14;\quad \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} = 7$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + 2\boldsymbol{v}$$

$$X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k},$$

megegyezésben fentebb kapott eredményünkkel.

*17. Mekkora távolságra van a $P(2,4,\ -3)$ pont az

$$\frac{x-1}{5} = \frac{2-y}{3} = -z$$

egyenestől?

* * *

A keresett d távolság nyilván az árnyékolt parallelogramma magasságával egyenlő, értékét tehát megadja a parallelogramma területének és alapjának hányadosa.

A terület... $|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{P_1P}|$; az alap ... $|\boldsymbol{v}|$, tehát

$$d = \frac{|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{P_1P}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Az egyenes egy P_1 pontjának koordinátái az egyenes egyenletéből könnyen kiolvashatók:

$$P_1(1,\ 2,\ 0)$$

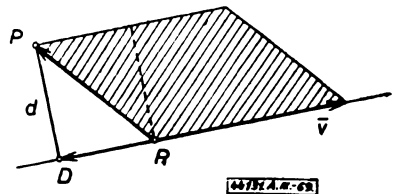
és így

$$\overrightarrow{P_1P}(1,\ 2,\ -3);$$

az irányvektor

$$\boldsymbol{v}(5,\ -3,\ -1);$$

$$\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{P_1P} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 11\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k}.$$



69. ábra

A keresett távolság

$$d = \frac{\sqrt{121 + 196 + 169}}{\sqrt{25 + 9 + 1}} = \sqrt{\frac{486}{35}}.$$

Megoldható a feladat úgy is — bár kissé hosszadalmasabban — hogy megkeressük az adott pontra illeszkedő és az adott egyenesre merőleges síknak és az egyenesnek a D döféspontját; a keresett távolságot ekkor a $\overrightarrow{PD}$ vektor abszolút értéke szolgáltatja.

Még egy megoldás: kiszámítjuk a $\overrightarrow{P_1P}$ vektornak a $\mathbf{v}$ vektor irányára merőleges összetevőjét, ennek abszolút értéke adja a keresett távolságot.

$$d = |\overrightarrow{P_1P} - \overrightarrow{P_1D}|.$$

A $\mathbf{v}$ irányba eső összetevő

$$d = \frac{\overrightarrow{P_1P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

és így

$$d = \left| \overrightarrow{P_1P} - \frac{\overrightarrow{P_1P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right|.$$

18. Meghatározandó az alábbi síkok közös pontja (metszéspontja):

$$x + y + z = 0$$
$$2x - y + z = 3$$
$$x + y - z = 0.$$

* * *

A metszéspont X, Y, Z koordinátáinak ki kell elégíteniök mindhárom sík egyenletét, ezért a feladat lényegében a fenti háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása. Az eredmény, tehát a P metszéspont koordinátái:

$$X = 1$$
$$Y = -1$$
$$Z = 0.$$

(E feladat általánosítását — a lineáris egyenletrendszer vektoralgebrai eszközökkel való megoldását — más helyen tárgyaljuk.)

19. Megállapítandó a

$$P_1(2, 3, 1)$$
$$P_2(-4, 2, -5)$$
$$P_3(0, 1, 0)$$

pontokra illeszkedő sík egyenlete.

* * *

Mint tudjuk, a sík egyenletének felírásához egy pontjának és normálvektorának ismerete szükséges. Az adatok között a sík három pontja is szerepel, a normálvektor azonban nincs közvetlenül megadva. Az adatokból fel tudunk írni két olyan vektort, melyek a síkban vannak (pl. $\overrightarrow{P_1P}$ és $\overrightarrow{P_1P_3}$); a normálvektor ezekre merőleges. Olyan

vektort, mely két adott vektorra merőleges, ismerünk: az adott vektorok vektoriális szorzata, tehát

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}.$$

Példánkban

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -6\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

A keresett sík egyenlete (bármelyik megadott pont felhasználásával):

$$-11x + 6y + 10z - 6 = 0.$$

Általános megoldás:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{n} = 0$$

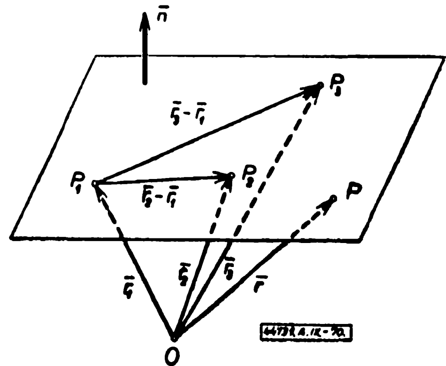
$$\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1).$$

$\mathbf{n}$ értékét helyettesítve láthatjuk, hogy a sík egyenlete három vektor vegyes szorzatával írható fel:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0.$$

Koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



70. ábra

Megjegyzés: ugyanerre a képletre úgy is eljuthattunk volna, hogy képeztük volna a

$$\overrightarrow{P_1P}, \quad \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \overrightarrow{P_1P_3}$$

vektorok vegyes szorzatát; e vegyes szorzatnak értéke zérus, mert a három vektor egy síkban van (komplanáris). Emlékeztetésül megemlítjük, hogy három vektor vegyes szorzata geometriailag a vektorok által „kifeszített" parallelepipedon (előjeles) térfogatát jelenti; ha a három vektor egy síkba esik, a térfogat és így a vegyes szorzat értéke is zérus.

Az olvasó meggyőződhetik arról, hogy a fenti példa számadatait behelyettesítve, a már megkapott eredményre jutunk.

20. Mi az egyenlete a $P(0, 2, -5)$ pontra illeszkedő és a következő egyenesekkel párhuzamos síknak:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{1-z}{4}$$

$$\frac{2x-1}{3} = 2 - y = \frac{z}{2}.$$

* * *

A keresett sík normálvektora merőleges mindkét egyenes irányvektorára, ezért

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}.$$

A keresett egyenlet

$$-12(y-2) - 6(z+5) = 0,$$

illetve egyszerűsítés után (a sík irányítása itt nem lényeges)

$$2y + z + 1 = 0.$$

Általánosságban:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ahol

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1$$

a megadott pont,

$$\left.\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix}\right\}$$

a megadott egyenesek irányvektorainak koordinátáit jelentik.

***21.** Meghatározandó annak a síknak az egyenlete, amely az alábbi síkok metszésvonalára illeszkedik és felezi azok hajlásszögét:

1. $$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (D_1 \neq 0)$$

numerikusan $$2x + y - 2z + 4 = 0;$$

2. $$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (D_2 \neq 9)$$

numerikusan: $$2x - 3y + 6z - 5 = 0.$$

* * *

Nyilván két ilyen sík van. Az egyik (I) abba a térrészbe esik, amely a koordinátarendszer kezdőpontját tartalmazza; a másik (II) a kezdőpontot nem tartalmazó térrészben van.

Bármelyik felezősík egy tetszőleges pontja ugyanolyan távol van az egyik megadott síktól, mint a másiktól. Amíg azonban az I. sík egy tetszőleges pontjának távolsága az adott síkok mindegyikétől ugyanolyan előjelű, addig a II. sík pontjaira ennek ellenkezője igaz.

Ezekre az egyszerű tényekre támaszkodva és felhasználva a pont és sík távolságának már ismert képletét, felírhatjuk a felezősíkok egyenleteit.

A kezdőpontot tartalmazó térrészbe eső felezősík (I) egyenlete ugyanis

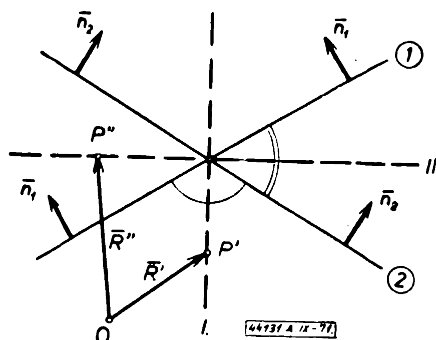
$$(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{r}_1)\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|} = (\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{r}_2)\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|},$$

vagy rendezve és az

$$\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|} = \boldsymbol{e}_{n_1}, \quad \frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|} = \boldsymbol{e}_{n_2}$$

jelölésekkel

$$\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{e}_{n_2}) = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{e}_{n_2}.$$



71. ábra

Koordinátás alakban:

$$sg\,D_1 \cdot \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = sg\,D_2 \cdot \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

A másik felező sík egyenlete (II)

$$\boldsymbol{R}''(\boldsymbol{e}_{n_1} - \boldsymbol{e}_{n_2}) = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{e}_{n_1} + \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{e}_{n_2},$$

illetve

$$sg\,D_1 \cdot \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = -\,sg\,D_2 \cdot \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Az elmondottak a következő egyszerű szabályba foglalhatók össze: a normálegyenleteket egymásból kivonva nyerjük a kezdőpontot tartalmazó térrészbe eső felezősík egyenletét; a másik felezősík egyenletét a normálegyenletek összeadásával kapjuk meg.

Numerikusan:

egyik adott sík normálegyenlete $\frac{2x + y - 2z + 4}{3} = 0,$

másik adott sík normálegyenlete $\frac{-2x + 3y - 6z + 5}{7} = 0.$

Az I. felezősík egyenlete

$$\frac{2x + y - 2z + 4}{3} - \frac{-2x + 3y - 6z + 5}{7} = 0,$$

rendezve

$$20x - 2y + 4z + 13 = 0.$$

A II. felezősík egyenlete

$$\frac{2x + y - 2z + 4}{3} + \frac{-2x + 3y - 6z + 5}{7} = 0,$$

rendezve

$$8x + 16y - 32z + 43 = 0.$$

Az olvasó meggyőződhetik arról, hogy a felezősíkok merőlegesek egymásra.

22. Felírandó annak a síknak az egyenlete, amely a $P_1(2, 7, -3)$ pontra és az

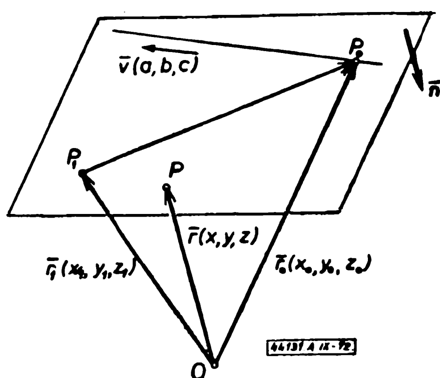
$$\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= t + 4 \\ z &= -3t + 2 \end{aligned}$$

egyenesre illeszkedik.

* * *

Mivel a sík egy pontja (P_1) már ismeretes, csak normálvektorát kell megállapítani. Ez merőleges a P_1 pontból az egyenes bármelyik — pl. $P_0(-1, 4, 2)$ — pontjába mutató vektorra és az egyenes $\boldsymbol{v}(2, 1, -3)$ irányvektorára, tehát

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{P_1P_0} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},$$



72. ábra

így a sík egyenlete

$$4(x-2) + (y-7) + 3(z+3) = 0$$
$$4x + y + 3z - 6 = 0.$$

Általában:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n} = 0$$
$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\overrightarrow{P_1P_0} \times \boldsymbol{v}) = 0$$
$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\overrightarrow{P_1P_0}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

Koordinátákban kifejtve

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

23. Mi az egyenlete a

$$-x = \frac{2y+1}{3} = \frac{5-3z}{4}$$

egyenesre illeszkedő és az (xz) koordinátasíkra merőleges síknak?

* * *

A keresett sík normálvektora merőleges az adott egyenes

$$\boldsymbol{v}\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}\right)$$

irányvektorára és az adott sík $\boldsymbol{j}(0, 1, 0)$ normálvektorára is, tehát

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}.$$

A keresett sík egy pontja lehet az adott egyenes bármelyik, pl.

$$P_0\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{3}\right) \text{ pontja,}$$

tehát az egyenlet

$$\frac{4}{3}x-\left(z-\frac{5}{3}\right)=0,$$

rendezve

$$4x-3z+5=0.$$

Feladatunk általános megoldása:

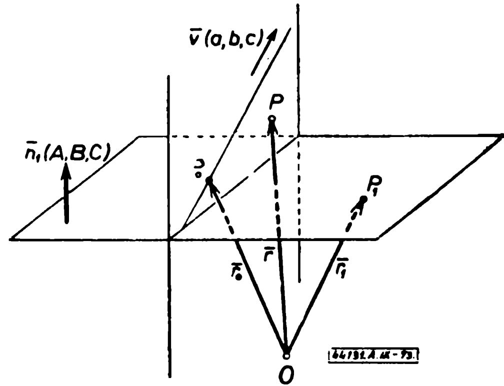
$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}=0$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}_1$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}_1)=0$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_1=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$



73. ábra

24. Mi az egyenletrendszere a $P(5,\ 7,\ 1)$ ponton átmenő és a következő síkokkal párhuzamos egyenesnek:

$$2x+y-z+7=0$$

$$x-8y+2z-3=0.$$

* * *

A keresett egyenes merőleges mindkét adott sík normálvektorára, ezért irányvektora

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 2 \end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k},$$

és így egyenletrendszere

$$x=5-6t$$

$$y=7-5t$$

$$z=1-17t.$$

Az általános képlet felírását az olvasóra bízzuk.

*25. Mi az egyenletrendszere a $P_1(4,\ -1,\ 1)$ ponton átmenő és a $2x+2y-3z+5=0$ síkkal párhuzamos egyenesnek?

* * *

Nyilvánvaló, hogy a feladatnak számtalan megoldása van, mert minden olyan egyenes megfelelő, amely átmegy a P_1 ponton és benne van az adottal párhuzamos síkban.

Legyenek az egyenes $\boldsymbol{v}$ irányvektorának koordinátái

$$\lambda,\ \mu,\ 1.$$

(Egy irányt jelző vektor egyik, zérustól különböző koordinátája mindig vehető ± 1-nek; az előjel az irányítástól függ, de az többnyire — mint példánkban is — nem lényeges.)

Minthogy $\boldsymbol{v}$ merőleges a sík normálvektorára, $\boldsymbol{n}(2, 2, -3)$-ra,

$$2\lambda + 2\mu - 3 = 0,$$

ahonnan

$$\mu = \frac{3 - 2\lambda}{2}$$

és az egyenes egyenletrendszere

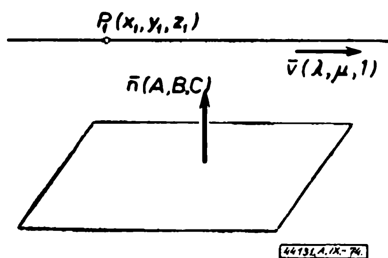
$$x = 4 + \lambda t$$

$$y = -1 + \frac{3 - 2\lambda}{2} t$$

$$z = 1 + t,$$

ahol λ tetszőleges értékeket felvehet; minden értékéhez más (de a kikötésnek megfelelő) egyenes tartozik.

Vegyük észre, hogy a megoldás a feladat kikötésének megfelelő egyenesek közül egyetlen egyet — amely az (xy) koordinátasíkkal párhuzamos — nem tartalmaz. Az olvasóra bízzuk annak megokolását, hogy ez miért van így, valamint azt is, hogy ennek az egyenesnek is írja fel az egyenletrendszerét.



74. ábra

A feladat megoldása általánosságban:

$$A\lambda + B\mu + C = 0$$

$$\mu = -\frac{C + A\lambda}{B},$$

$$x = x_1 + \lambda t$$

$$y = y_1 - \frac{C + A\lambda}{B} t$$

$$z = z_1 + t.$$

Megemlítjük, hogy ez az egyenletrendszer úgy is felfogható, mint egy sík — mégpedig éppen az adott síkkal párhuzamos és az adott pontot tartalmazó sík — (természetesen két változótól függő) paraméteres egyenletrendszere. Hogy ez így van, a paraméterek (λ és t) kiküszöbölésével látható be. Ha példánkban a paramétereket kiküszöböljük, a

$$2x + 2y - 3z - 3 = 0$$

egyenlethez jutunk, melyről közvetlenül belátható, hogy az adott síkkal párhuzamos (mert normálvektora ugyanaz) és a $P_1(4, -1, 1)$ pontot tartalmazó sík egyenletét jelenti.

26. Meghatározandó a következő síkok közös egyenesének (metszésvonalának) egyenletrendszere:

$$2x + y - 5z + 3 = 0$$
$$x - y + 2z = 0.$$

* * *

Ebben a példában az egyenes egyenletének felírásához szükséges adatok — az egyenes egy fix pontja és irányvektora — egyike sincs közvetlenül megadva, tehát először ezeket kell megkeresni.

Az irányvektor mindkét sík normálvektorára merőleges, így

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

A metszésvonal valamely pontjának három koordinátája közül az egyik nyilván önkényesen vehető fel, a másik kettő ennek a két sík egyenletébe való behelyettesítésével nyerhető. Legyen pl. $x_1 = 0$. (Ez egyébként geometriailag azt jelenti, hogy megkeressük az adott síkok és az (yz) koordinátasík közös pontját, vagy — ami ugyanaz — a két sík metszésvonalának és az (yz) koordinátasíknak a döféspontját. Természetesen előfordulhat, hogy a síkok metszésvonala párhuzamos ezzel — esetleg még egy koordinátasíkkal; mindhárom koordinátasíkkal azonban nem lehet párhuzamos, tehát a P_1 pont valamelyik koordinátája vehető zérusnak.)

Az $x_1 = 0$ értéket a két sík egyenletébe helyettesítve

$$y_1 - 5z_1 + 3 = 0$$
$$-y_1 + 2z_1 = 0.$$

Ebből

$$y_1 = 2, \quad z_1 = 1$$

és a metszésvonal egyenletrendszere

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z-1}{-3},$$

vagy egyszerűbben

$$x = \frac{y-2}{3} = z - 1.$$

A feladat általános megoldása:

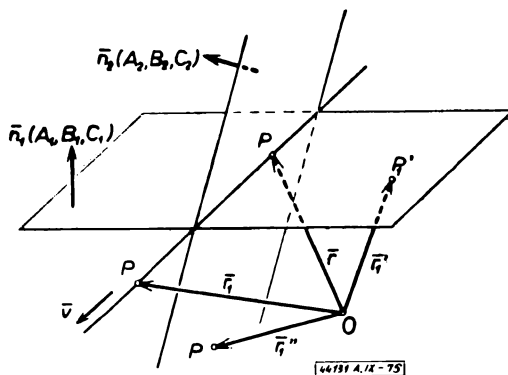
A metszésvonal egyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v},$$

ahol

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

$\mathbf{r}_1$ meghatározása úgy történik, hogy megkeressük az egyik (a metszésvonallal nem párhuzamos) koordinátasík és az adott síkok közös pontját (lásd a 18. példát).



75. ábra

Ha pl. az (yz) koordinátasík a metszésvonallal nem párhuzamos:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 C_1 \\ d_2 C_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} B_1 d_1 \\ B_2 d_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}}{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}} + t \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

ahol

$$d_1 = \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{n}_1 \quad \text{és} \quad d_2 = \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{n}_2.$$

*27. Mi az egyenletrendszere az

$$x = 4 + t$$
$$y = -1 - t$$
$$z = 10 + 6t$$

egyenes vetületének a

$$3(x-2) - 2(y-1) + 4(z+2) = 0$$

síkon?

* * *

Legegyszerűbb megoldásnak látszik a következő: válasszunk ki az egyenesen két pontot, keressük meg ezek vetületét a síkon, majd írjuk fel a két vetületi ponton átmenő egyenes egyenletét.

Az egyik pont legyen pl. az egyenes egyenletéből könnyen kiolvasható $P_0(4, -1, 10)$. Ennek vetületét megkapjuk, ha megkeressük a rajta átmenő, a síkra merőleges egyenesnek a síkkal való döféspontját. A vetítő egyenes egyenlete:

$$x' = 4 + 3t$$
$$y' = -1 - 2t$$
$$z' = 10 + 4t.$$

A döféspont koordinátáira

$$t = -2,$$

tehát a döféspont (azaz P_0 vetülete a síkon)

$$P(-2, 3, 2,).$$

A másik pont legyen az adott egyenes döféspontja az adott síkkal; ez a legalkalmasabb, mert egybeesik vetületével. Ez a pont, mint könnyen kiszámítható

$$D(2, 1, -2).$$

Mivel $\overrightarrow{DP} = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, az egyenes irányvektorául egy ezzel párhuzamos vektort kell választanunk; legyen ez az egyszerűség kedvéért pl.

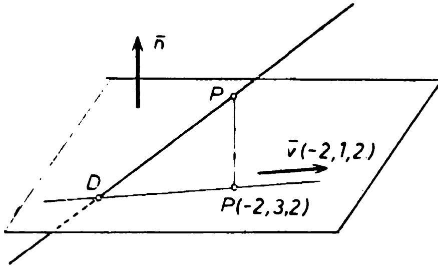
$$\boldsymbol{v}(-2, 1, 2).$$

Most már felírhatjuk a keresett egyenes egyenletrendszerét:

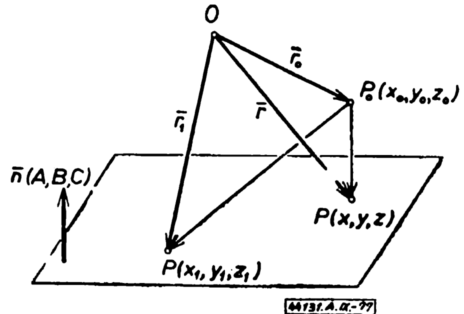
$$X = -2 - 2t$$
$$Y = 3 + t$$
$$Z = 2 + 2t.$$

Feladatunk általánosítása igen tanulságos.

A megoldás összefügg azzal a két kérdéssel, hogy hogyan kell felírni egy pont, illetőleg egy vektor valamely síkra való vetületének a koordinátáit. Foglalkozzunk először ezekkel a kérdésekkel.



76. ábra



77. ábra

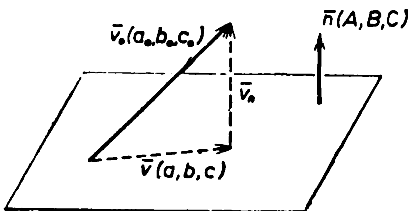
Az ábráról látható, hogy P_0 vetületére, P-re nézve

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \overrightarrow{P_0P}.$$

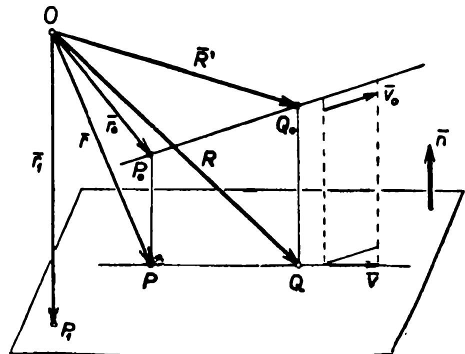
Ámde $\overrightarrow{P_0P}$ felírható úgy, mint a $\overrightarrow{P_0P_1}$ vektornak (P_1 a sík tetszőleges pontja lehet) a normálvektor irányába eső összetevője, tehát

$$\overrightarrow{P_0P} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n},$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,$$



78. ábra



79. ábra

következőleg

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n}.$$

A $\boldsymbol{v}_0$ vektornak a normálvektor irányára merőleges összetevője:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n}.$$

Mármost az

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t$$

egyenes vetületének egyenlete nyilván

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}t.$$

Ide beírván $\boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{v}$ előbb kapott értékeit, lesz

$$\boldsymbol{R} = \left[\boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n}\right] + \left[\boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n}\right]t,$$

vagy

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_0 + k_1\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{v}_0 - k_2\boldsymbol{n})t,$$

ahol

$$k_1 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2} \quad \text{és} \quad k_2 = \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}.$$

Skaláris alakban:

$$X = (x_0 + k_1A) + (a_0 - k_2A)t$$
$$Y = (y_0 + k_1B) + (b_0 - k_2B)t$$
$$Z = (z_0 + k_1C) + (c_0 - k_2C)t.$$

Megadott példánk számadatai:

$$\boldsymbol{r}_0(4, -1, 10), \quad \boldsymbol{v}_0(1, -1, 6)$$
$$\boldsymbol{r}_1(2, 1, -2), \quad \boldsymbol{n}(3, -2, 4)$$
$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$$

$$k_1 = \frac{-6 - 4 - 48}{9 + 4 + 16} = -2$$

$$k_2 = \frac{3 + 2 + 24}{9 + 4 + 16} = 1.$$

A keresett egyenletrendszer tehát:

$$X = (\ 4 - 2 \cdot 3) + (\ 1 - 1 \cdot 3)t = -2 - 2t$$
$$Y = (-1 + 2 \cdot 2) + (-1 + 1 \cdot 2)t = 3 + t$$
$$Z = (\ 10 - 2 \cdot 4) + (\ 6 - 1 \cdot 4)t = 2 + 2t,$$

pontos megegyezésben a már kiszámított értékekkel.

*28. Igazoljuk, hogy az

$$x - 3 = \frac{y - 8}{3} = \frac{z - 3}{4}$$

és

$$4 - x = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - z}{5}$$

egyenesek egy síkban vannak, és állapítsuk meg metszéspontjaik koordinátáit.

*

* *

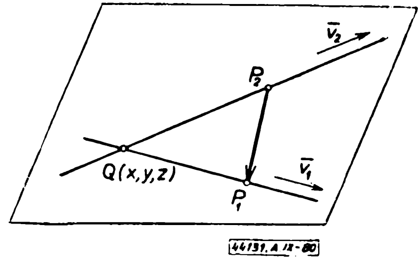
Ha két egyenes egy síkban van, akkor egy-egy tetszőleges pontjukat összekötő egyenesszakasz is ugyanabban a síkban fekszik, következőleg a

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$$

vektorok egysíkúak (komplanárisok).

Egysíkú vektorok vegyes szorzata zérus, tehát

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = 0.$$



80. ábra

Ez két egyenes egy síkba esésének szükséges (és egyúttal elégséges) feltétele.

A kitűzött példában

$$\boldsymbol{r}_1(3,\ 8,\ 3) \quad \boldsymbol{v}_1(\ 1,\ 3,\ 4)$$
$$\boldsymbol{r}_2(4,\ 9,\ 9) \quad \boldsymbol{v}_2(-1,\ -2,\ -5)$$

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

az egyenesek valóban egy síkba esnek.

A Q metszéspont koordinátáinak megállapítása végett írjuk az egyenesek egyenletrendszereit paraméteres alakba és jelöljük t_1-gyel, illetve t_2-vel a paramétereknek a Q ponthoz tartozó értékeit. Ekkor nyilván

$$X = 3 + t_1 = 4 - t_2,$$
$$Y = 8 + 3t_1 = 9 - 2t_2,$$
$$Z = 3 + 4t_1 = 9 - 5t_2,$$

azaz a t_1 és t_2 paraméter-értékek megállapítására a következő egyenletek állanak rendelkezésünkre:

$$t_1 + t_2 = 1$$
$$3t_1 + 2t_2 = 1$$
$$4t_1 + 5t_2 = 6.$$

A harmadik egyenletre — amely egyébként nem is független az első kettőtől — nincs is szükségünk.

Ezekből

$$t_1 = -1,$$
$$t_2 = 2,$$

a metszéspont koordinátái pedig

$$X = 2$$
$$Y = 5$$
$$Z = -1.$$

Írjunk fel most képletet a metszéspont koordinátáinak kiszámítására.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{v}_2.$$

Válasszunk egy olyan vektort, amely az egyik irányvektorra, pl. $\boldsymbol{v}_2$-re merőleges; ilyet könnyű felírni, pl.

$$\boldsymbol{v}_2(a_2,\ b_2,\ c_2) \perp \boldsymbol{v}_2^*(b_2,\ -a_2,\ 0).$$

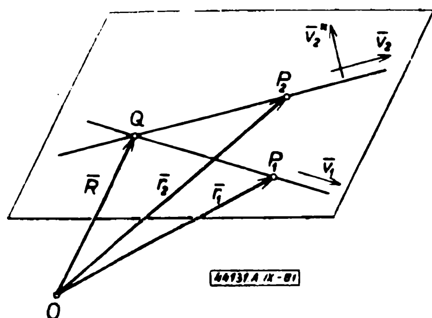
Mármost a

$$t\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2$$

vektoregyenlőséget skalárisan szorozva $\boldsymbol{v}_2^*$-gal,

$$t_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2^* = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{v}_2^*, \qquad (\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^* = 0)$$

$$t_1 = \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{v}_2^*}{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2^*},$$



81. ábra

és így

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{v}_2^*}{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2^*}\boldsymbol{v}_1.$$

Példánk adatainak megfelelően

$$\boldsymbol{v}_2^*(-2,\ 1,\ 0); \qquad \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{v}_2^*}{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2^*} = -1,$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{v}_1,$$

azaz

$$X = 2$$
$$Y = 5$$
$$Z = -1.$$

*29. Mi az egyenletrendszere annak a *(transzverzális)* egyenesnek, amely a következő három egyenesre illeszkedik:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_1 + t'\boldsymbol{v}_1 \qquad \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}_2 + t''\boldsymbol{v}_2 \qquad \boldsymbol{r}''' = \boldsymbol{r}_3 + t'''\boldsymbol{v}_3$$

$$\boldsymbol{r}_1(2,\ 3,\ 4) \qquad \boldsymbol{r}_2(0,\ -1,\ -2) \qquad \boldsymbol{r}_3(3,\ 5,\ 7)$$

$$\boldsymbol{v}_1(1,\ -1,\ 2) \qquad \boldsymbol{v}_2(2,\ 1,\ -3) \qquad \boldsymbol{v}_3(-2,\ 2,\ 3).$$

* * *

A feladat megfogalmazható a következőképpen is: meghatározandók a t', t'', t''' paraméterek olyan k, l, m értékei, hogy az ezeknek megfelelő Q_1, Q_2, Q_3 pontok egy egyenesbe essenek. Ezek ismeretében a keresett egyenes egyenletrendszere könnyen felírható.

A O_1 és Q_2 pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét

$$X = 2 + k + T\,[2l - (2 + k)]$$
$$Y = 3 - k + T\,[(-1 + l) - (3 - k)]$$
$$Z = 4 + 2k + T\,[(-2 - 3l) - (4 + 2k)]$$

kielégítik a Q_3 pont koordinátái, tehát azokat a bal oldalon beírva és rendezve az

$$\frac{1 - k - 2m}{-2 - k + 2l} = T \qquad \frac{2 + k + 2m}{-4 + k + l} = T$$

$$\frac{3 - 2k + 3m}{-6 - 2k - 3l} = T,$$

illetve a T paraméter kiküszöbölésével az

$$\frac{1-k-2m}{-2-k+2l}=\frac{2+k+2m}{-4+k+l}$$

$$\frac{1-k-2m}{-2-k+2l}=\frac{3-2k+3m}{-6-2k-3l}$$

egyenletekhez jutunk.

A három ismeretlen kiszámításához két egyenletünk van, ami azt jelenti, hogy egyiket közülük (bármelyiket) szabadon választhatjuk meg. Ennek az a geometriai jelentése, hogy bármelyik megadott egyenesen kiválasztva egy pontot, ahhoz tartozik egy olyan egyenes, amely feladatunknak megfelelő; a Q_1, Q_2, Q_3 pontok közül egyik szabadon választható (kivéve, ha mind a három egyenes párhuzamos egymással és nincsenek egy síkban, amikor is nincs megoldás).

Az elmondottakat szemléletesen elképzelhetjük, ha az egyik egyenesen egy síkot átfektetünk és azt forgatjuk: a sík minden helyzetéhez hozzátartozik a másik két egyenes egy-egy döféspontja és ezek a sík forgatásakor végigfutnak a két egyenesen.

Válasszuk meg önkényesen pl. a Q_1 pontot, mégpedig úgy, hogy $k=0$ legyen: $Q_1(2, 3, 4)$.

A másik két paraméter kiszámítására ekkor a következő egyenletek állanak rendelkezésünkre:

$$\frac{1-2m}{-2+2l}=\frac{2+2m}{-4+l}$$

$$\frac{1-2m}{-2+2l}=\frac{3+3m}{-6-3l}.$$

Egyenletrendszerünknek algebrailag két megoldása van:

$$l=0 \qquad l=1,$$

és

$$m=0 \qquad m=\frac{1}{2},$$

de ez nem azt jelenti, hogy mind a két megoldás kielégíti a geometriai feltételt is Az eredeti feladatba való behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy csak a

$$k=0, \quad l=0, \quad m=0$$

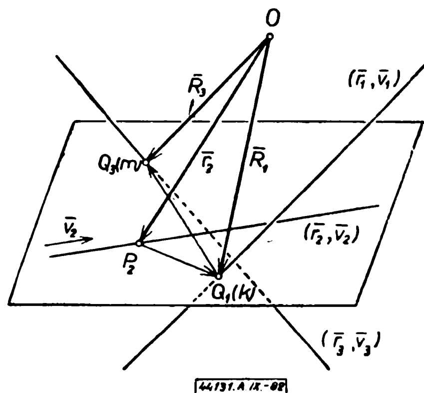
értékek felelnek meg, azaz az illeszkedési pontok:

$$\begin{aligned} &Q_1(2, && 3, && 4) \\ &Q_2(0, && -1, && -2) \\ &Q_3(3, && 5, && 7) \end{aligned}$$

és a transzverzális egyenletrendszere (a Q_1 és Q_3 pontok segítségével felírva):

$$X=2+T$$
$$Y=3+2T$$
$$Z=4+3T.$$

Az általános megoldást dolgozzuk ki a következőképpen: keressük meg az egyik egyenes tetszőleges Q_1 pontját, valamint a másik egyenesen átfektetett síknak a harmadik egyenessel való Q_3 döféspontját, majd írjuk fel a Q_1 és Q_3 pontokon átmenő egyenes egyenletét.



82. ábra

Az ábra rövidített jelölései azt tüntetik fel, hogy pl. az első egyenes egy pontjának helyzetvektora $\boldsymbol{r}_1$, irányvektora $\boldsymbol{v}_1$ stb.; a Q_1 ponthoz a paraméter k értéke, a Q_3 ponthoz a paraméter m értéke tartozik.

A Q_1 és Q_3 pontokon átmenő egyenes egyenlete

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + T(\boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1),$$

ahol

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{r}_1 + k\boldsymbol{v}_1$$

$$\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{r}_3 + m\boldsymbol{v}_3.$$

Az m paraméterérték kiszámításához használjuk fel azt a tényt, hogy a

$$\overline{P_2Q_1} = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2, \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \text{és a} \quad \overline{Q_1Q_3} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1$$

vektorok egy síkban vannak, következőleg vegyes szorzatuk zérus.

$$(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1) = 0$$

$$(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2[(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{R}_1) + m\boldsymbol{v}_3] = 0$$

$$(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{R}_1) + m(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3 = 0.$$

Ebből

$$m = \frac{(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3}.$$

A nyert értéket beírva, a keresett transzverzális egyenlete lesz

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + k\boldsymbol{v}_1 + T\left[\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 - k\boldsymbol{v}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 + k\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{r}_1 + k\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{r}_1 + k\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3}\boldsymbol{v}_3\right],$$

ahol k értéke tetszés szerinti; legyen pl. $k = 0$, akkor

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + T(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 + m\boldsymbol{v}_3),$$

ahol

$$m = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3}.$$

Példánkra alkalmazva ($k = 0$)

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = 0,$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)T,$$

vagy skalárisan

$$X = 2 + T$$
$$Y = 3 + 2T$$
$$Z = 4 + 3T.$$

*30. Megállapítandó annak az (ún. *normáltranszverzális*) egyenesnek egyenletrendszere, mely merőleges és illeszkedik a következő egyenesekre:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{v}_1 \qquad \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{v}_2$$
$$\boldsymbol{r}_1(3,\ 0,\ -2) \qquad \boldsymbol{r}_2(-1,\ 2,\ 4)$$
$$\boldsymbol{v}_1(2,\ -2,\ -1) \qquad \boldsymbol{v}_2(-3,\ 1,\ 1).$$

Megállapítandó továbbá a normáltranszverzális azon szakaszának hossza is, amely az adott egyenesek közé esik.

* * *

A normáltranszverzális $\boldsymbol{V}$ irányvektora az adott egyenesek irányvektoraira merőleges, ezért

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

A normáltranszverzális egy pontjának megállapítása végett fektessünk át az egyik egyenesen egy olyan síkot, amely párhuzamos $\boldsymbol{V}$-vel és keressük meg a másik egyenesnek ezzel a síkkal való döféspontját.

Az $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ egyenesen áthaladó, $\boldsymbol{V}$-vel párhuzamos sík egyenlete

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n} = 0,$$

ahol

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{V},$$

tehát

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{V} = 0.$$

Az $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ egyenesnek e síkkal alkotott Q_2 döféspontja koordinátáit szolgáltató t_2' paraméter értéke az

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{V} = 0$$

egyenletből tehát

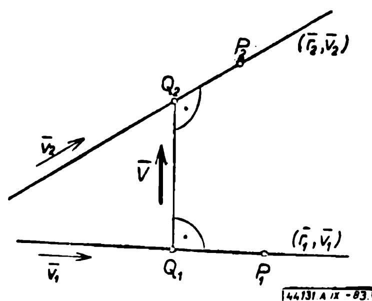
$$t_2' = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{V}}.$$

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18,$$

Q_2 helyzetvektora tehát

$$\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{v}_2,$$



83. ábra

és így koordinátái

$$X_2 = x_2 - a_2 = 2$$
$$Y_2 = y_2 - b_2 = 1$$
$$Z_2 = z_2 - c_2 = 3.$$

Most már felírhatjuk a normáltranszverzális egyenletrendszerét:

$$X = 2 - T$$
$$Y = 1 + T$$
$$Z = 3 - 4T.$$

A normáltranszverzálisnak az adott egyenesek közé eső szakasza hosszát kiszámíthatjuk pl. úgy, hogy megállapítjuk a Q_2 pont távolságát az $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ egyenestől (lásd a 17. példát):

$$d = \frac{|\mathbf{v}_1 \times \overrightarrow{P_1Q_2}|}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{9}} = \sqrt{18}.$$

Ezek után nem nehéz a normáltranszverzális általános vektoregyenletének a felírása sem:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 + T\mathbf{V},$$

ahol

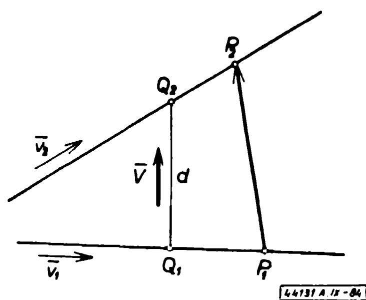
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{v}_1\mathbf{V}}{\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{V}}\,\mathbf{v}_2$$

és

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

Így tehát

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}\,\mathbf{v}_2 + T(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2).$$



84. ábra

Ha csak a normáltranszverzális „hossza", azaz a két kitérő egyenes egymástól való távolsága keresendő, sokkal egyszerűbben járhatunk el.

A Q_1Q_2 szakasz d hossza ugyanis éppen a

$$\overline{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

vektor hosszának vetülete $\mathbf{V}$ irányába, azaz

$$d = \left| |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos(\overrightarrow{P_1P_2}, \mathbf{V}) \right| =$$

$$= \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbf{V}|}{|\mathbf{V}|} = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|},$$

vagyis

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Példánk számadatait behelyettesítve meggyőződhetünk arról, hogy képleteink a már kapott eredményekre vezetnek.

GYAKORLÓ FELADATOK

α) Pont, távolság, szög, terület, térfogat

1. Osszuk fel az AB távolságot 3 : 4 : 1 arányban. Mik az osztópontok koordinátái, ha az adott pontok:

$$A(-10,\ 2,\ 4),\quad B(6,\ 10,\ 20).$$

2. Mik az alábbi háromszög súlypontjának koordinátái?

$$A(4,\ 1,\ 7)\quad B(3,\ -1,\ 0)\quad C(2,\ 9,\ -6).$$

3. Egy kocka három csúcspontjának koordinátái:

$$A(1,\ 2,\ 3)\quad C(10,\ -2,\ 2)\quad C_1(3,\ 5,\ 9)$$

A és C egy lapátló, C és C_1 egy testátló végpontjai. Meghatározandók a többi csúcspont koordinátái.

4. Milyen hosszúak a következő tetraéder élei:

$$A(2,\ 4,\ 6)\quad B(-1,\ 3,\ 7)\quad C(0,\ -2,\ -7)\quad D(7,\ 1,\ -2).$$

5. Melyik az a pont, mely -4 egység távolságra van az xy koordinátasíktól és egyenlő távol fekszik a következő pontoktól:

$$P_1(3,\ 2,\ 5)\quad P_2(1,\ 1,\ 6)\quad P_3(2,\ 2,\ 6).$$

6. Egy háromszög csúcspontjai:

$$A(1,\ 5,\ 6);\quad B(-2,\ -1,\ 0);\quad C(2,\ 2,\ 1).$$

a) Mekkora az AC oldalhoz tartozó magasság?

b) Mekkorák a háromszög szögei?

7. Megállapítandó a következő síkok hajlásszöge:

$$2x - 5y + z = 0$$

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + 5 = 0.$$

8. Meghatározandó a következő egyenesek hajlásszöge:

$$\frac{x+5}{3} = -5 + y = z \qquad \frac{x-5}{4} = \frac{2-y}{3}\ \frac{z+1}{5}\ .$$

9. Párhuzamos-e egymással a következő sík és egyenes:

a)

$$4(x-1)+y+z=0$$
$$x=\frac{y-1}{2}=-\frac{z}{6}$$

b)

$$2x+3y-z+5=0$$
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{5}=\frac{3-2z}{4}\ ?$$

10. Mekkora a háromszög területe, ha csúcspontjainak koordinátái:

a)	b)	c)
$A(5,\ 4,\ 0)$	$A(0,\ 2,\ 3)$	$A\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{5},\ 3\right)$
$B(0,\ 5,\ -1)$	$B(1,\ 0,\ 2)$	$B\left(-\frac{1}{4},\ 2,\ 0\right)$
$C(2,\ 0,\ -2)$	$C(3,\ -1,\ 0)$	$C\left(\frac{2}{7},\ \frac{1}{2},\ -5\right)$?

11. Mekkora a tetraéder négy magasságának hossza, ha a csúcspontok koordinátái:

$A(1,\ 2,\ 3)$ $C(1,\ 3,\ -5)$
$B(6,\ -2,\ 0)$ $D(0,\ 1,\ 1)$?

12. Mekkora a tetraéder térfogata, ha csúcspontjainak koordinátái:

$A(3,\ -1,\ -1)$ $C(4,\ 0,\ -2)$
$B(5,\ -2,\ 3)$ $D(5,\ 0,\ 1)$?

*13. Határozzuk meg a parallelepipedon térfogatát, ha egyik lapján levő csúcs pontjai:

$A(2,\ 4,\ 1)$
$B(3,\ 1,\ 2)$
$D(4,\ 1,\ -2)$

és az A csúcspontból kiinduló testátló végpontja:

$A_1(3,\ 7,\ 2)$.

*14. Egy tetraéder lapjainak súlypontjai:

$S_1(2,\ 1,\ 1)$ $S_3(2,\ -1,\ 3)$
$S_2(4,\ 1,\ 2)$ $S_4(0,\ 2,\ 2)$.

Meghatározandó a tetraéder térfogata.

*15. Mekkora a térfogata annak a négyoldalú gúlának, melynek csúcspontjai:

$P_1(0,\ 0,\ -8)$ $P_4(0,\ 4,\ 0)$
$P_2(8,\ 0,\ 0)$ $P_5(-2,\ -1,\ 1)$.
$P_3(6,\ 5,\ 8)$

16. Mekkora a háromszög kerülete, ha két csúcspontja: $P_1(2, 3, 5)$, $P_2(4, -3, 0)$, súlypontja pedig: S $(3, 2, 1)$?

17. Egy háromszög csúcspontjai: $P_1(5, 13, 1)$, $P_2(1, 1, -5)$, $P_3(3, 7, -8)$. Megállapítandó a háromszögbe írható kör sugara.

18. Egy háromszög csúcspontjai: $P_1(0, -1, 3)$, $P_2(7, -2, 4)$, $P_3(5, 0, -1)$. Milyen arányban állanak a P_1P_2S, P_2P_3S, P_3P_1S háromszögek területei, ha S az adott háromszög súlypontja?

19. Meghatározandó a következő egyenes és sík hajlásszöge:

$$x = 3 + 5t, \quad y = 2 - t, \quad z = 5$$

$$3x - 4y + z - 1 = 0.$$

20. Egy tetraéder csúcspontjai:

$$P_1(4, 4, 1), \quad P_2(2, -2, 5), \quad P_3(0, 7, -3), \quad P_4(1, 9, 3).$$

Mekkora szöget alkot a $P_1P_2P_3$ lappal az az egyenes, amely ennek a lapnak a súlypontján és a P_4 csúcsponton megy át?

β) Egyenes egyenletrendszere

1. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P(1, 0, -5)$ pontra illeszkedik és párhuzamos a következő két síkkal:

$$3(x-1) + 2(y+3) + 8 = 0$$
$$x + 2z - 6 = 0?$$

2. Meghatározandó a $P(5, -2)$ pontra illeszkedő és a $2x - 3y = 4$ egyenesre merőleges egyenes egyenlete.

(Az xy síkban megadott feladat!)

3. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P(2, 4, -3)$ pontra illeszkedik és merőleges az alábbi pontokkal adott síkra:

$$A(4, 7, -2)$$
$$B(1, 0, 9)$$
$$C(0, 0, 1)?$$

4. Felírandó annak az egyenesnek az egyenletrendszere, mely az origón megy át és az xy koordinátasíkhoz 45°, az yz koordinátasíkhoz pedig 30° szög alatt hajlik.

5. Meghatározandó a következő két sík metszésvonalának egyenletrendszere:

$$x - y + 2z = 0$$
$$2x + 3y + 4z - 6 = 0.$$

6. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely benne van a

$$-3x + 2y - 5z + 3 = 0$$

síkban és merőleges az

$$\frac{1-2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{5z}{4}$$

egyenesre?

7. Egy parallelepipedon adva van $P(4, 3, 1)$ csúcspontjával és a belőle kiinduló három élvektorával:

$$a(2, 1, 3),$$
$$b(3, -1, 4),$$
$$c(-2, 1, 5).$$

Megállapítandók a testátlók egyenletrendszerei.

*8. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P(-1, 0, 2)$ pontra illeszkedik, az

$$\frac{x-10}{3} = -\frac{y+1}{6} = \frac{z-7}{2}$$

egyenesre merőleges és attól 7 egység távolságra halad?

9. Mi az egyenletrendszere az

$$x = 2 + 3t$$
$$y = -3 - 2t$$
$$z = t$$

egyenes vetületének az $x + 3y - 6z + 4 = 0$ síkon?

10. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely párhuzamos az

$$5x + y - 2z + 3 = 0$$
$$x - 2y + 5z - 4 = 0$$

síkokkal, az elsőtől 4 egységnyire, a másodiktól 5 egységnyire és abban a térrészben halad, amely az origót tartalmazza?

*11. Mi az egyenletrendszere annak az egyenletnek, amely benne fekszik az

$$x = \frac{y+13}{5} = \frac{5-z}{3}$$

$$\frac{1-x}{5} = \frac{y+8}{3} = z - 2$$

egyenesek síkjában, átmegy metszéspontjukon és felezi hajlásszögüket?

*12. Felírandó annak az egyenesnek az egyenletrendszere, mely az origóra és a következő egyenesekre illeszkedik:

$$x - 4 = -\frac{y+7}{3} = \frac{z-2}{2}$$

$$\frac{5-x}{3} = \frac{9-y}{5} = z + 9.$$

*13. Felírandó annak az egyenesnek az egyenletrendszere, amely a

$$2x + 4y - z + 5 = 0$$

síkra merőleges és a következő egyenesekre illeszkedik:

$$\frac{x}{2} = -y = z$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}\,.$$

***14.** Határozzuk meg λ értékét úgy, hogy a következő egyenesek messék egymást:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{1-2y}{3} = -z$$

$$\frac{x-3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1+z.$$

***15.** Meghatározandó az alábbi egyenesek normáltranszverzálisának egyenletrendszere:

$$\frac{x-9}{2} = y - 7 = -\frac{3z}{5}$$

$$x+1 = \frac{13-y}{4} = \frac{3z+27}{11}\,.$$

***16.** Felírandó azoknak az egyeneseknek az egyenletrendszere, amelyek a $P(2, -1, 5)$ ponton mennek át és 30°-os szöget alkotnak a $2x - 4y + z = 0$ síkkal.

17. Egy háromszög csúcspontjai: $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(5, 1, 4)$, $P_3(3, 3, 2)$. Felírandó a P_1 csúcsnál levő szög felező egyenesének egyenletrendszere.

18. Egy háromszög csúcspontjai: $P_1(5, 1, -2)$, $P_2\,(1, 0, 3)$, $P_3(3, 5, -1)$. Felírandó annak az egyenesnek az egyenletrendszere, mely merőleges a háromszög síkjára és átmegy a háromszög súlypontján.

***19.** Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely benne van az

$$x = 1 + 3t, \quad y = -1, \quad z = 1 + 4t$$

és

$$x = -1 + 2t, \quad y = -3 + 2t, \quad z = t$$

egyenesek síkjában, átmegy a $P(18, -11, 32)$ ponton és az adott egyenesekkel egyenlőszárú háromszöget alkot?

***20.** Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely benne van a $2x + y - 20z + 77 = 0$ síkban, átmegy a sík $P(0, 3, 4)$ pontján és amelytől a sík $Q(9, 5, 5)$ pontja 9 egység távolságra van?

γ) Sík egyenlete

1. Felírandó annak a síknak az egyenlete, amely a $P(2, 1, -5)$ pontra illeszkedik és párhuzamos a következő egyenesekkel:

$$\frac{x}{2} = \frac{2-y}{3} = z \qquad \frac{4x-15}{8} = y = \frac{z}{4}\,.$$

2. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a $P(2, 1, 6)$ pontra illeszkedik és merőleges a következő síkokra:

$$2x + 5y - 3z + 8 = 0$$
$$x - 2y + z - 5 = 0 \, ?$$

3. Meghatározandó a $P(2, -1, -2)$ pontra illeszkedő és az

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{5z-1}{6}$$

egyenesre merőleges sík egyenlete.

4. Felírandó annak a síknak az egyenlete, amely az

$$x = 2 + 3t$$
$$y = -3 + t$$
$$z = 5 - 2t$$

egyenesre merőleges és a döféspont koordinátái:

$$(-1, -4, 7).$$

5. Keresendő a $P_1(4, 0, -2)$ és $P_2(1, 3, 4)$ pontokat a $2x - 3y + 6z - 5 = 0$ síkra vetítő sík egyenlete. (P_1 és P_2-re illeszkedik, az adott síkra merőleges.)

6. Meghatározandók azoknak a síkoknak az egyenletei, amelyek az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z+2}{3}$$

egyenest a koordinátasíkokra vetítik.

7. Mi az egyenlete annak a síknak, amely merőleges az

$$5(x-1) + 4y - (z+1) = 0$$

síkra és átmegy a következő síkok metszésvonalán:

$$2x - y + z + 3 = 0$$
$$x + 2y - z - 1 = 0?$$

8. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a

$$P(5, 4, 2) \quad \text{és} \quad Q(1, 3, 4)$$

pontokra illeszkedik és egyenlő hosszú pozitív darabokat vág le az y és z koordinátatengelyekből?

9. Egy tetraéder csúcspontjának koordinátái:

$$A(1, -2, 0) \qquad C(-1, 2, 2)$$
$$B(2, 3, 1) \qquad D(3, 1, 4).$$

Meghatározandók:

a) BCD sík egyenlete,
b) BC élen átmenő, AD éllel párhuzamos sík egyenlete,
c) az A csúcspontra illeszkedő és a BCD síkkal párhuzamos sík egyenlete.

10. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a koordinátatengelyekből a -4, 5, -7 távolságokat vágja le?

*11. Mi az egyenlete annak a síknak, amelyben a következő egyenesek benne vannak:

$$x = 9 + 2t \qquad x = 1 - 5t$$
$$y = 14 + 3t \qquad y = 2 + 4t$$
$$z = -5 - t \qquad z = -1 - 2t \;?$$

*12. Legyen adva két egyenes:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = -\frac{z}{3}.$$

Mi az egyenlete azoknak a síkoknak, amelyek egy-egy megadott egyenesre illeszkednek és párhuzamosak egymással?

*13. Az $x + 2y - z + \lambda = 0$ sík egyenletében meghatározandó λ értéke úgy, hogy a sík menjen át a következő síkok metszésvonalán:

$$2x - y + z = 0$$
$$26x + 2y + 4z + 3 = 0.$$

Megjegyzés: Az olvasó előzetesen győződjék meg arról, hogy az adott síkok metszésvonala nem döfi át az első síkot!

*14. Felírandó annak a síknak az egyenlete, amely párhuzamos az

$$5x - 2y + z - 6 = 0$$

síkkal, attól egységnyire van; az adott sík az origó és a keresett sík között fekszik.

*15. Mi az egyenlete annak a síknak, amely az x tengelyre illeszkedik és amelyből az alábbi síkok egyenlőszárú háromszöget metszenek ki:

$$x + y = 1$$
$$x - z = 1$$
$$2x + y - z = 1 \;?$$

Hány ilyen sík van?

16. Felírandó mindazon síkok egyenlete, amelyek merőlegesek a következő síkok metszésvonalára:

$$2x - y + 3z + 5 = 0, \qquad 3x + 5y - 6z + 1 = 0.$$

17. Igazolandó, hogy az

$$x - 1 = 4 - y = \frac{z-3}{2}$$

és

$$\frac{x+1}{2} = \frac{7-y}{3} = 4 - z$$

egyenesek egy síkban vannak, és felírandó a sík egyenlete.

18. Felírandó a $P_1(1, -3, 0)$ és $P_2(3, 7, -4)$ pontokat összekötő egyenesszakaszt merőlegesen felező sík egyenlete.

19. Felírandó a $P_1(2, 1, 7)$ és $P_2(-1, 2, 16)$ pontokra illeszkedő és a $4x + 3y + z - 10 = 0$ síkra merőleges sík egyenlete.

*20. Felírandók az

$$x = 1, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 4 + t$$

egyenesre illeszkedő és a $P(2, 1, 3)$ ponttól egységnyi távolságra haladó síkok egyenletei.

δ) Vegyes összetett példák

1. Mekkora a Q pont távolsága a

$$P_1(1, 2, 3), \quad P_2(4, 5, 6), \quad P_3(7, 8, c)$$

pontokon átfektetett síktól, ha Q a következő síkok metszéspontja:

$$x + y + z - 7 = 0$$
$$2x - 3y - z + 3 = 0$$
$$x - y + z - 5 = 0.$$

2. Meghatározandó az $A(1, 5, -3)$ és $B(2, 3, -5)$ pontokat összekötő egyenesdarabnak a

$$2x + 3y - 6z = 0$$

síkra való merőleges vetülete.

3. Meghatározandó annak a tetraédernek a térfogata, melynek egyik csúcspontja: $P_1(2, 1, 2)$, a többiek pedig a P_1-ből a következő síkokra bocsátott merőlegesek döféspontjai:

$$x - 3y + z - 2 = 0$$
$$x + y - 3z + 4 = 0$$
$$x - y + 2z - 6 = 0.$$

4. Felírandó a $\mathfrak{v}(5, -1, 3)$ vektornak a

$$2x - y + 3z + 5 = 0$$

síkra merőleges és síkkal párhuzamos összetevője.

5. Határozzuk meg a következő párhuzamos síkok közti távolságot:

$$2x + y - 3z + 6 = 0$$
$$4x + 2y - 6z - 5 = 0.$$

6. Legyen adott a következő háromszög:

$$A(1, 7, 2), \quad B(3, 8, 0), \quad C(-2, -1, 5).$$

Mik a koordinátái:

a) a magassági pontnak,
b) a körülírható kör középpontjának,
c) a beírható kör középpontjának?

7. Egy derékszögű parallelepipedon egyik csúcspontja az origó, az ebből kiinduló testátló másik végpontjának koordinátái: 4, 3, 2. Felírandók az origóból kiinduló lapátló-vektorok, ha a parallelepipedon élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

8. Egy háromszög csúcspontjának koordinátái:

$$A(1,\ 7,\ 0),\quad B(2,\ -5,\ 3),\quad C(6,\ 2,\ -9).$$

Mi a mértani helye az AB alapon álló, ugyanabban a síkban fekvő és k-szor akkora területű háromszögek harmadik csúcspontjának?

9. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyek egyenlő távol vannak a következő három ponttól:

$$P_1(2,\ 2,\ 1),\quad P_2(8,\ 6,\ 2),\quad P_3(6,\ 3,\ 5)\ ?$$

10. Bontsuk fel a $\boldsymbol{v}(10,\ 6,\ -8)$ vektort a következő egyenesekkel párhuzamos összetevőkre:

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{1-2z}{3}$$

$$2x = \frac{1-y}{5} = \frac{z+1}{2}$$

$$\frac{2x+3}{-3} = \frac{y+5}{4} = -z.$$

*11. Határozzuk meg λ értékét úgy, hogy az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v}_1 t$$

egyenesek messék egymást:

$$\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = a_0\boldsymbol{i} + b_0\boldsymbol{j} + \lambda\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j} + c_1\boldsymbol{k}.$$

Az adatok:

$$\boldsymbol{r}_0(1,\ 2,\ 3)\qquad \boldsymbol{r}_1(4,\ 1,\ -3)$$

$$\boldsymbol{v}_0(3,\ -1,\ \lambda)\qquad \boldsymbol{v}_1(2,\ 0,\ -1).$$

*12. Számítsuk ki a következő egyenesek egymástól való távolságát:

$$\frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4}$$

$$x = y = z.$$

*13. Legyen adva a térben négy pont: P_1, P_2, P_3, P_4.

Az M és N pontok ugyanabban az arányban osztják a P_1P_2 és P_3P_4 távolságokat

$$P_1M : MP_2 = P_3N : NP_4 = \lambda.$$

Igazoljuk, hogy a (P_1, P_2, P_3, P_4), (P_1, P_3, M, N) és (P_2, P_4, M, N) pontok súlypontjai egy egyenesen vannak. Megjegyzés: pontrendszer súlypontjának koordinátáit az egyes pontok megfelelő koordinátáinak számtani közepei adják.

Számadatok:

$$P_1(1,\ 2,\ 5)\quad P_2(2,\ -3,\ 1)\quad P_3(4,\ 0,\ 2)\quad P_4(0,\ -2,\ 1)\qquad \lambda = \frac{1}{3}.$$

*14. Adva van a következő három sík:

$$2x + 4y + 3z = 1$$
$$x + 7y + 4z = 3$$
$$3x - 5y - z = -2.$$

Van-e olyan vektor, amely mindhárom síkkal párhuzamos és ha igen, melyik az?

15. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely egyenlő távol van a következő síkoktól:

$$3(x - 1) + 2(y + 2) - z + 6 = 0$$
$$-x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

16. Melyik az

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{5} = z + 1$$

egyenesnek az a pontja, mely egyenlő távol van a következő síkoktól:

$$4x + 2y - z + 6 = 0$$
$$2x - 4y + z - 5 = 0\ ?$$

*17. Mekkora az a távolság, melynek vetülete

az $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = -\frac{z}{6}$ egyenesre $+2$ egység,

az $x = \frac{y - 1}{4} = \frac{1 - z}{8}$ egyenesre $+3$ egység,

az $\frac{1 - 2x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z + 1}{4}$ egyenesre $+1$ egység?

*18. Keressük meg az

$$x = 5 + 3t$$
$$y = 4 - 2t$$
$$z = 11$$

egyenesnek a $13x + 13y + 30z - 202 = 0$ síkra való vetületén azt a pontot, amely az egyenestől 7 egység távolságra van.

*19. Mi az általános egyenlete azoknak az egyeneseknek, amelyek az

$$x - 2y + z - 5 = 0$$

síkban fekszenek és merőlegesek az

$$x = 4 + t$$
$$y = 5 + t$$
$$z = -2 + t$$

egyenesre?

20. Tükrözzük a $P(2, 4, -3)$ pontot

a $Q = (1, 3, 7)$ pontra,

az $x = 2y = -z$ egyenesre és

az $x - 2y + 5z = 0$ síkra,

és állapítsuk meg a négy pont által meghatározott tetraéder térfogatát.

21. Keressük meg az

$$x = 2t$$
$$y = 3 - t$$
$$z = -1 + 5t$$

egyenesnek azokat a pontjait, amelyek egyenlő távolságokra vannak a következő síkoktól:

$$3x - 5y + 5z - 6 = 0$$
$$x + 3y - 7z + 1 = 0.$$

*22. Adva van a $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ síkban négy pont:

$P_1(0, 0, 3)$

$P_2(0, 4, 0)$ és $P_4(-2, 0, 2)$

$P_3(-6, 0, 0)$.

Meghatározandó annak az egyenesnek az egyenletrendszere, amely a P_4 ponton átmegy és felezi a $P_1P_2P_3$ háromszög területét.

*23. Egy háromszög csúcspontjai:

$$P_1(2, 5, 6), \quad P_2(4, -1, -2), \quad P_3(3, -2, 5).$$

Forgassuk el a háromszöget P_1P_2 oldala körül $60°$-kal, miközben P_3 csúcsa P_3'-be kerül, és számítsuk ki a $P_1P_2P_3P_3'$ tetraéder térfogatát.

*24. Adva van a következő háromszög:

$$P_1(1, 1, 1), \quad P_2(2, 2, 2), \quad P_3(-1, 2, 0).$$

Meghatározandó annak a síknak az egyenlete, amely az x tengelyre illeszkedik és amelyre nézve a háromszög vetületének területe az eredetinek fele.

*25. Egy tetraéder csúcspontjai:

$P_1(1, 1, 1)$ $P_3(1, -1, 1)$

$P_2(-1, 1, 1)$ $P_4(1, 1, -1)$.

Meghatározandó annak a síknak az egyenlete, amely a $P_2 P_3 P_4$ síkkal párhuzamos és a tetraédert egyenlő térfogatú részekre vágja.

3. §. NÉHÁNY MECHANIKAI ALKALMAZÁS

Az ebben a §-ban közölt — tájékoztató jellegű — feladatokhoz mintapéldákat nem adunk, ehelyett minden feladat teljes és részletes kidolgozását közöljük az eredménytárban.

Mégis felhívjuk az olvasó figyelmét a **13.**, **14.**, **17.**, **22.**, **23.**, **26.**, **29.** és **30.** feladatokra, melyek elvi jelentőségűek és amelyek a *β)* és *γ)* alatt közölt többi feladat megoldásának alapjául szolgálnak.

α) Erők összetevése, szétbontása

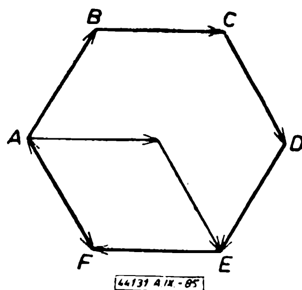
1. Három síkban ható erő abszolút értéke rendre p, $2p$, $3p$; egymással 120°-os szöget zárnak be. Határozzuk meg az eredőjüket.

2. Az *ABCD* parallelogramma tetszőleges *O* belső pontján át húzzunk a parallelogramma oldalaival párhuzamos egyeneseket; messék ezek a parallelogramma oldalait a P_1, P_2, P_3, P_4 pontokban. Bebizonyítandó, hogy az OP_1, OP_2, OP_3 és OP_4 szegmentumok által jelképezett erők eredője O-ból a parallelogramma *K* középpontja felé mutat.

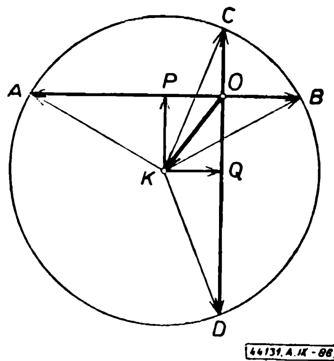
3. Egy parallelepipedon *O* csúcspontjában találkozó három oldallapjának átlói legyenek *OK*, *OL* és *OM*. Mi az eredője három, az *O*-ban támadó és a lapátlók által képviselt erőnek?

4. Az *ABCDEF* szabályos hatszög *A* csúcspontjában a következő erők hatnak: $\vec{AB}$, $2\vec{AC}$, $3\vec{AD}$, $4\vec{AE}$ és $5\vec{AF}$. Mekkora az eredő erő abszolút értéke?

$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = |\vec{DE}| = |\vec{EF}| = |\vec{AF}|$



85. ábra

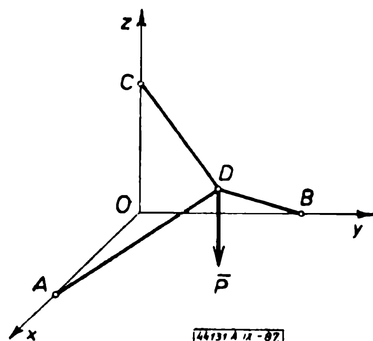


86. ábra

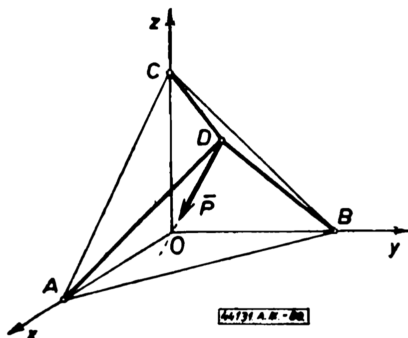
5. Egy kör *AOB* és *COD* húrjai egymást derékszög alatt metszik. Mi az *OA*, *OB*, *OC* és *OD* szakaszok által képviselt erők eredője?

6. Az O pontban támadó $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots \boldsymbol{P}_n$ erők nagysága és iránya olyan, hogy az őket ábrázoló vektorok végpontjai egy szabályos n-szög csúcspontjait alkotják. Megszerkesztendő az erők eredője.

*7. Három, az A, B, C pontokban csuklósan rögzített l hosszúságú rúd a D pontban csuklósan találkozik (87. ábra). D-ben $\boldsymbol{P}$ erő hat, mely a z tengellyel párhuzamos. Meghatározandók a rúderők, ha $OA = OB = OC = l$.



87. ábra



88. ábra

*8. Három l hosszúságú rúd a D pontban csuklósan találkozik (88. ábra). D-ben $\boldsymbol{P}$ erő hat, mely O felé irányul. Meghatározandók a rúderők, ha $AB = BC = CA = l$.

9. Adott $\boldsymbol{P}$ erő olyan $\boldsymbol{P}_1$ és $\boldsymbol{P}_2$ összetevőkre bontható, hogy

a) $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)_\sphericalangle = \alpha > \frac{\pi}{2}$ és

b) $\boldsymbol{P}_1$ abszolút értéke maximális legyen.

10. Bizonyítandó: ha két erő eredőjének abszolút értéke egyenlő valamelyik összetevő abszolút értékével, akkor az összetevő erők irányai tompaszöget zárnak be.

11. p és $2p$ abszolút értékű erők eredője $\boldsymbol{p}$-re merőleges. Mekkora szöget zár be a két összetevő?

12. $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ erők között a következő kapcsolat áll fenn:

a) az erők eredője zérus,

b) $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ erők abszolút értéke egyenlő,

c) $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)_\sphericalangle = \varphi$,

d) $(\boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_1)_\sphericalangle = \psi$.

Megszerkesztendő $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$, ha adva van $\boldsymbol{P}_1$.

β) Erőrendszer redukciója (eredő erő és nyomaték, centrális tengely, erőcsavar)

13. A $\boldsymbol{P}$ erő támadáspontjának helyzetvektora $\boldsymbol{r}_1$; egy t tengelyt egy pontjának $\boldsymbol{r}_2$ helyzetvektora és $\boldsymbol{t}$ irányvektora jellemezzenek. Felírandó a $\boldsymbol{P}$ erőnek a t tengelyre vonatkozó nyomatéka.

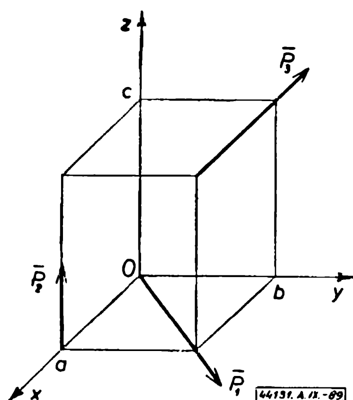
14. Legyen a $\boldsymbol{P}(X, Y, Z)$ erő támadáspontjának helyzetvektora az $\boldsymbol{r}(x, y, z)$. Felírandók a koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékok.

15. Határozzuk meg a 89. ábrán megadott erőrendszernek a koordinátatengelyekre vonatkozó nyomatékait. A derékszögű hasáb éleinek hossza:

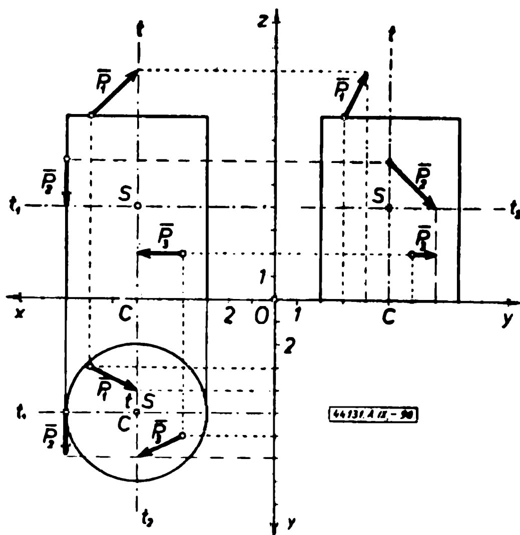
$$a = 3 \text{ m}$$
$$b = 4 \text{ m}$$
$$c = 5 \text{ m},$$

az erők abszolút értékei:

$$P_1 = 25 \text{ kg}$$
$$P_2 = 10 \text{ kg}$$
$$P_3 = 25 \text{ kg}.$$

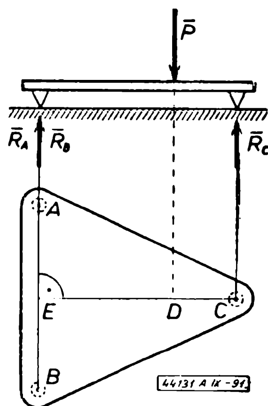


89. ábra



90. ábra

16. A 90. ábra a koordinátasíkokra való vetületeivel ábrázol egy hengert. A henger felületének három pontjában a $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ erők támadnak. Meghatározandó az erőrendszer nyomatéka a henger tengelyére vonatkozólag. (Egy hosszegység 0,1 m távolságnak, illetve 1 kp erőnek felel meg.) — Meghatározandó a nyomaték a henger súlypontján átmenő és az x koordinátatengellyel párhuzamos tengelyre is.



91. ábra

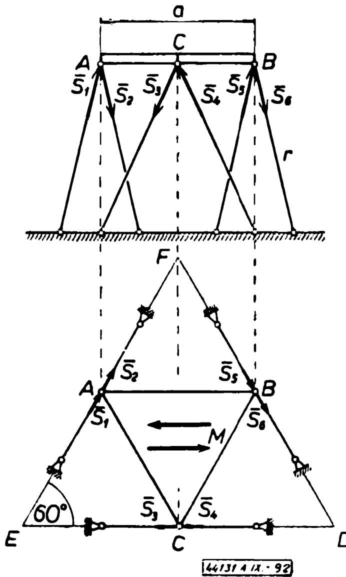
17. Valamely vízszintes lemez A, B, C függőleges lábakon nyugszik (91. ábra). A lemezt $P = 10$ kp nagyságú, függőleges erő terheli. Keresendők az A, B, C pontokban fellépő $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{R}_C$ reakcióerők.

$$AB = 1{,}2 \text{ m}$$
$$AE = EB$$
$$AC = BC = 1{,}4 \text{ m}$$
$$CD = 0{,}4 \text{ m}.$$

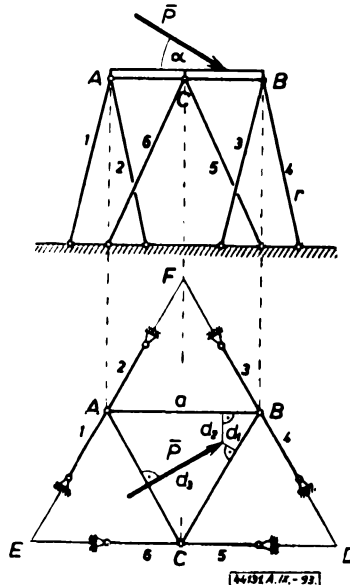
*18. A 92. ábrán két képben látható egy térbeli szerkezet: 6 egyenlő hosszú csuklós rúd tart egy szabályos háromszög alakú lapot. A lapot benne fekvő M nyomatékú erőpár támadja. Meghatározandók a rúderők.

(Számadatok: a lap egy élének hossza 1 m, a rudak hossza 1,2 m, $M = 10$ mkp; a forgató hatás értelme az ábrából kitűnik.)

$$a = 1 \text{ m}$$
$$r = 1{,}2 \text{ m}$$
$$M = 10 \text{ mkp}.$$



92. ábra



93. ábra

*19. A 18. feladatban leírt szerkezet ABC lapjára hasson most csak egy $\boldsymbol{P}$ erő (l. 93. ábra). Keresendők a rúderők. A $\boldsymbol{P}$ erő hatásvonala az ABC lap síkjához $\alpha = 30°$ szög alatt hajlik.

$$|\boldsymbol{P}| = P = 20 \text{ kp}$$
$$a = 1 \text{ m}$$
$$r = 1{,}2 \text{ m}$$
$$d_1 = 0{,}1 \text{ m}$$
$$d_2 = 0{,}2 \text{ m}$$
$$\alpha = 30°.$$

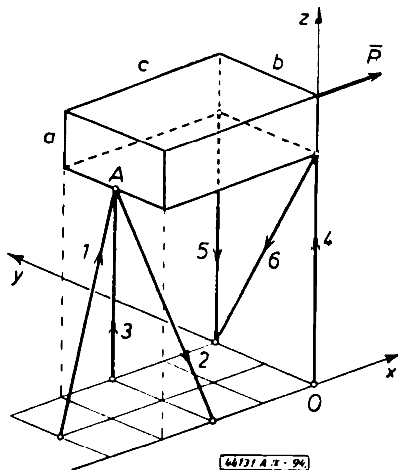
20. Valamely derékszögű hasábot 6 csuklós rúd támaszt. Az 1, 2, 3 jelzésű rudak az A pontban találkoznak; 4, 5, 6 rudak egy függélyes síkba esnek. A hasáb egyik éle a $\boldsymbol{P}$ erő hatásvonalába esik. Keresendők a rúderők, ha

$$|\boldsymbol{P}| = P = 3000 \text{ kp}$$
$$a = 1 \text{ m}$$
$$b = 2 \text{ m}$$
$$c = 3 \text{ m},$$

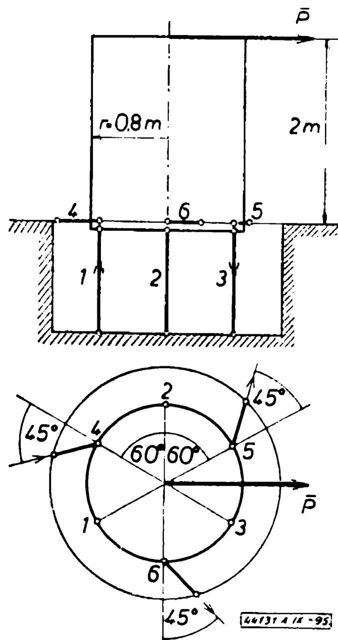
a 4-es rúd hossza: 3 m. Egyéb adatok a 94. ábrából olvashatók le.

21. A két képben ábrázolt hengert hat rúd tartja: az 1, 2, 3 jelűek függőlegesek, 4, 5, 6 egy vízszintes síkba esnek. A henger fedőlapján **P** vízszintes erő hat, nagysága: $P = 1000$ kp. Egyéb adatok a 95. ábrából olvashatók le. Meghatározandók a rúderők.

22. Egy merev testre három, egy síkban fekvő erő hat. Az erők síkjában felvett x, y koordinátarendszerben ezeket az erőket a következő adatok határozzák meg:



94. ábra



95. ábra

Az erő			
jelölése	támadáspontjának helyzetvektora	abszolút értéke	irányának hajlásszöge az x tengelyhez
$F_1(X_1,\ Y_1)$	$r_1(2;\ 1)$	12	$\alpha_1 = 45°$
$F_2(X_2,\ Y_2)$	$r_2(-0{,}5;\ 2)$	18	$\alpha_2 = 150°$
$F_3(X_3,\ Y_3)$	$r_3(3{,}5;\ -0{,}9)$	9	$\alpha_3 = 15°$

Meghatározandó:

a) Az erők eredője.
b) Az eredő nyomaték a koordinátarendszer kezdőpontjára vonatkoztatva.
c) Az erőrendszer centrális tengelye.

23. Bizonyos erőrendszert a tér O pontjára redukálva az eredő erő abszolút értéke

$$R = |\boldsymbol{R}| = 120,$$

az eredő nyomaték abszolút értéke pedig

$$M_0 = |\boldsymbol{M}_0| = 30,$$

továbbá $\boldsymbol{R}$ és $\boldsymbol{M}_0$ hajlásszöge:

$$\alpha = 15°.$$

Meghatározandó:

a) az erőrendszer centrális tengelye,

b) az erőcsavar adatai (eredő, minimális absz. értékű nyomaték), illetve az erőrendszer nyomatéka a centrális tengely körül $\varrho = 0{,}8$ sugárral írt hengerfelület valamely pontjában.

24. A 15. feladat adatai és eredményei alapján redukáljuk az erőrendszert az origóra.

25. Legyen adott a 96. ábrán vázolt szerkezeti elem (a *CBA* rész függélyes síkban van, az *OA* rúd rá merőleges). A szerkezet *C*-ben be van fogva és *O* pontban három erő támadja:

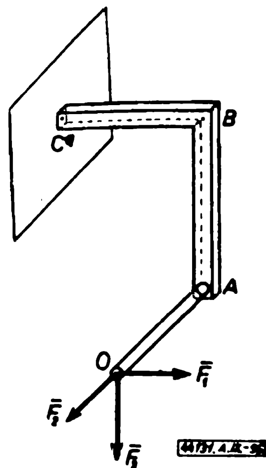
$\boldsymbol{F}_1$ vízszintesen balról jobbra irányul, nagysága 250 kp,
$\boldsymbol{F}_2$ vízszintesen *AO* irányba mutat, nagysága 180 kp,
$\boldsymbol{F}_3$ függőleges, felülről lefelé mutat, nagysága 300 kp.
Redukálandó az erőrendszer az *A*, *B* és *C* pontokra.

$$OA = 0{,}15 \text{ m}$$
$$AB = 0{,}25 \text{ m}$$
$$BC = 0{,}35 \text{ m}.$$

*26. Legyen adva két erő ($\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$) kitérő hatásvonallal. Bizonyítandó, hogy az erőrendszer centrális tengelye metszi az erők hatásvonalának normáltranszverzálisát.

*27. Legyen adva $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ erő kitérő, egymásra merőleges hatásvonalakkal; a két hatásvonal legrövidebb távolsága legyen *d*. Meghatározandó a centrális tengely.

*28. A megadott, kitérő hatásvonalú és egymással $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ szöget alkotó $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ erők hatásvonalainak legkisebb távolsága *d*. Meghatározandó a centrális tengely.



96. ábra

γ) *Virtuális munka elve (egyensúly, reakcióerők)*

A virtuális munka elve szerint valamely tömegpont egyensúlyának az a feltétele, hogy a tömegpontra ható összes erők munkája zérus legyen a tömegpont *bármely lehetséges* (virtuális) *elemi* elmozdulása esetén.

A vektorszámítás kifejezésmódját használva, a virtuális munka elvét a következő képlet fejezi ki:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \, \boldsymbol{\delta s} = 0,$$

ahol $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ a ható erőket, $\boldsymbol{\delta s}$ pedig bármilyen lehetséges elemi elmozdulást jelent. (Ui. a munka az erővektor és az elmozdulásvektor skaláris szorzata.)

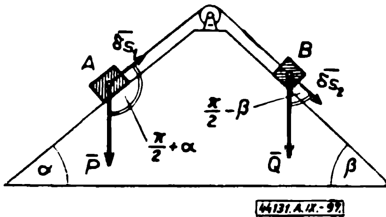
A tömegpont lehet *szabad,* amikor is bármilyen irányú elemi elmozdulás meg van engedve és lehet *kényszernek alávetett,* amikor a tömegpont csak egy megadott görbén (vagy felületen) mozoghat; utóbbi esetben az elemi elmozdulás csak az érintő (érintősík) irányában van megengedve.

29. Felírandó egy szabad tömegpont egyensúlyának feltétele. (Közös pontban támadó erők.)

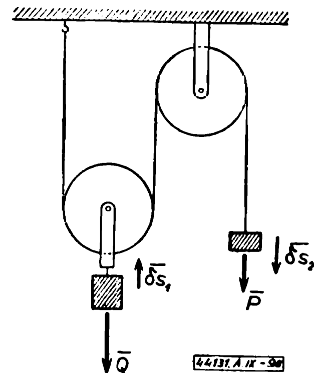
30. Felírandó egy ideális, ún. kétoldalú kényszernek alávetett tömegpontra ható erők egyensúlyának feltétele.

31. Megállapítandó az egyensúly feltétele a következő, két tömegpontból álló rendszer esetén (97. ábra). Az α, illetve β hajlásszögű síklejtőkön legyenek A, illetve B tömegpontok; ezeket a lejtők metszésvonalára állított csigán átvetett (nyújthatatlan, tökéletesen hajlékony és elhanyagolható súlyú) fonál kösse össze. Az A pontra a $\boldsymbol{P}$, a B pontra a $\boldsymbol{Q}$ függőleges irányú erők hassanak.

32. Felírandó az egyensúly feltétele egy álló és egy mozgó csigából álló rendszer esetén; a mozgó csiga villájára a $\boldsymbol{Q}$, a fonál szabad végére a $\boldsymbol{P}$ függőleges erők hassanak (98. ábra).

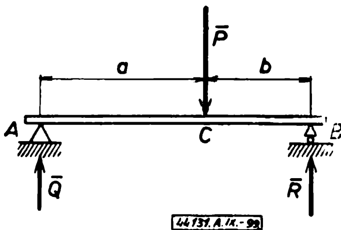


97. ábra

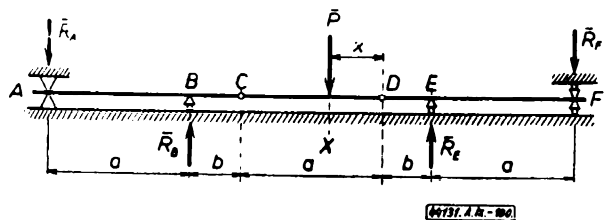


98. ábra

33. Legyen egy merev, vízszintesen elhelyezett rúd az A és B pontokban alátámasztva; C pontjában hasson rá a függélyes $\boldsymbol{P}$ erő ($AC = a$, $BC = b$). Mekkora reakcióerők támadnak az A és B pontokban? (99. ábra.)



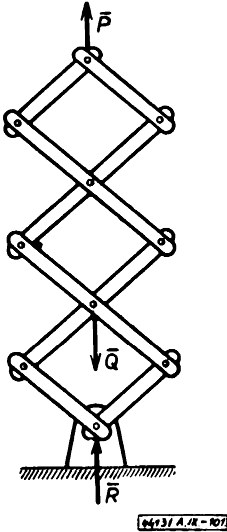
99. ábra



100. ábra

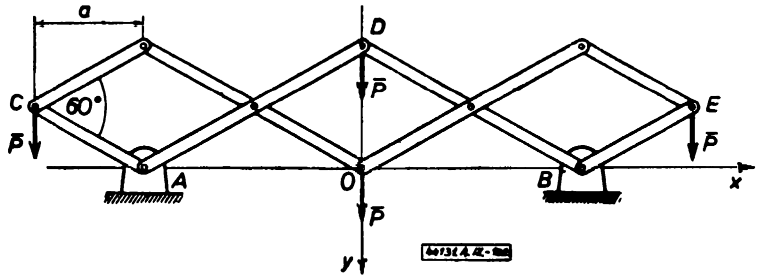
*34. A 100. ábrán feltüntetett ún. *Gerber-tartó* X pontjában hasson a $\boldsymbol{P}$ erő. Meghatározandók a tartó A, B, E és F pontjaiban fellépő reakcióerők. (A Gerber-tartó rúdjai a C és D pontokban csuklósan kapcsolódnak, e pontokban hajlító nyomaték nincs; egyéb adatok az ábráról olvashatók le.)

35. A 101. ábrán látható, egyenlő (illetve a végeken feleakkora) hosszú, csuklósan illeszkedő merev rudakból álló labilis rúdszerkezet („nürnbergi olló") *A* pontjában a függélyesen felfelé irányított ***P*** erő, *B* pontjában az ellenkező irányú ***Q*** erő hat. Meghatározandó a (rögzített) *C* pontban fellépő ***R*** reakcióerő.



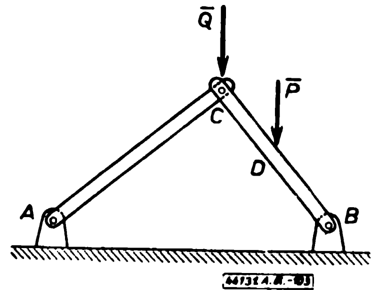
101. ábra

36. A 102. ábrán látható, *A* és *B* helytálló csuklókkal bíró csuklós rúdszerkezet *C, D, O, E* pontjaiban a függőleges irányú, lefelé mutató egyenlő ***P*** erők hatnak. Megállapítandók az *A* és *B* pontokban fellépő reakcióerők.



102. ábra

*37. A 103. ábrán látható csuklós szerkezet *C* pontjában a ***Q***, *D* pontjában a ***P*** erő hat. Meghatározandók az *A* és *B* pontokban fellépő reakcióerők.



103. ábra

MÁSODIK RÉSZ

4. §. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

a) A lineáris egyenletrendszer fogalma

A *lineáris egyenletrendszerek* általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m, \end{aligned}$$

ahol

$$a_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

valamint

$$c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

megadott *konstansok,* míg

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

a kiszámítandó *ismeretlenek.* Bármelyik egyenlet bal oldala tehát olyan algebrai összeg, melynek minden tagjában csak egy ismeretlen és csak első hatványon fordulhat elő.

Az a_{ik} konstansok indexszámai közül az első azt mutatja, hogy *hányadik egyenletben* fordul elő; a második indexszám azt jelzi, hogy a konstans *hányadik ismeretlen* együtthatója. Így az

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ -2x + y + 3z &= 0 \\ 3x - y \qquad &= 5 \end{aligned}$$

háromismeretlenes egyenletrendszerben például

$$\begin{aligned} &a_{12} = 1, \quad a_{21} = -2, \quad a_{33} = 0, \\ &c_1 \ = 2, \quad c_2 = \ \ 0, \quad c_3 \ = 5. \end{aligned}$$

Ha a $c_1, c_2, \ldots, c_m$ konstansok mindegyike zérus, az egyenletrendszer *homogén,* különben *inhomogén.*

Ha $m = n$ (azaz az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyezik), akkor az egyenletrendszert határozottnak fogjuk nevezni; $m < n$ esetén határozatlan, $m > n$ esetén túlhatározott.

Mivel a lineáris egyenletrendszerek megoldásában döntő szerepe van a *determinánsoknak,* valamint a *matrixoknak,* alábbiakban röviden foglalkoznunk kell velük.

b) A determináns fogalma, tulajdonságai

Legyen adva n^2 számú, meghatározott sorrendben felírt mennyiség („elem"). Írjuk ezeket két függőleges vonal közé oly módon, hogy az első sorba írjuk az első n elemet, majd ezek alá a második n elemet és így tovább; ily módon n *sorból* (illetve az egymás alá került elemeket tekintve: n *oszlopból*) álló rendszert nyerünk, melyet *n-edrendű determinánsnak* nevezünk ($n = 2, 3, \ldots$).

A determináns pontosan meghatározott mennyiség, melynek értékét az őt alkotó elemekből meghatározott műveleti szabály szerint számíthatjuk. Erre az alábbiakban vissza fogunk térni.

A determináns elemeit kétindexes betűvel jelöljük; minden elem egy sorhoz és egyidejűleg egy oszlophoz tartozik, az első index a *sorindex*, a második az *oszlopindex*. Pl. a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

harmadrendű determinánsban az a_{23}-mal jelzett elem, mely a második sorhoz és a harmadik oszlophoz tartozik: 3.

Az n-edrendű determináns általános alakja tehát

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Rövidebb jelöléssel:

$$A = |a_{ik}|. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Megjegyezzük, hogy kisebb determinánsoknál gyakran előfordul, hogy csak egy indexet alkalmazunk, esetleg egyet sem. Pl. a másodrendű determinánsnál

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

vagy a harmadrendűnél

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Válasszuk ki a determináns valamelyik elemét; legyen ez (általánosságban): a_{ik} (i-edik sor k-adik eleme). Elhagyván a kiválasztott elem sorának és oszlopának minden elemét, nyerünk egy eggyel alacsonyabbrendű determinánst, az a_{ik} elemhez tartozó *aldeterminánst;* ha ezt az aldeterminánst megszorozzuk még $(-1)^{i+k}$-nal nyerjük az a_{ik} elem előjeles aldeterminánsát, *adjungáltját*. Tekintsük pl. a

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

harmadrendű determinánst; ebben pl. $a_{12} = 3$, a hozzá tartozó aldetermináns

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix},$$

a_{12} adjungáltja pedig, melyet A_{12}-vel szokás jelölni:

$$A_{12} = (1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Az adjungált előjelét megjegyezhetjük az ún. *sakktáblaszabály* alapján is: az első sor első eleme helyébe írjunk egy + jelet, a többi elem helyébe felváltva —, ill. + jelet, amint a sakktábla váltakozó színű mezői egymásra következnek:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Bármelyik elem adjungáltja az elem helyének megfelelő előjelet kapja.

A determináns értékét most már a következő módon számíthatjuk ki. Válasszuk ki a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát; a kiválasztott sor (oszlop) minden elemét szorozzuk meg adjungáltjával és az így nyert szorzatokat összegezzük. Az így kiszámított összeg (mely ugyanaz, bármelyik sorból, illetve oszlopból indulunk ki) adja a determináns értékét.

Látható, hogy az n-edrendű determináns értékének kiszámítását ily módon visszavezetjük az $(n-1)$-edrendű determináns kiszámítására; az $(n-1)$-edrendű kiszámítását az $(n-2)$-edrendűére és így tovább. A másod- és harmadrendű determináns értékének kiszámítását közvetlenül jegyezzük meg:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3c_1b_2.$$

A harmadrendű determináns értékét kiszámíthatjuk az ún. *Sarrus-szabály* alapján is: írjuk le a determináns mellé az első két oszlopot és a nyilak irányában fekvő elemeket szorozzuk, majd a megfelelő előjellel lássuk el:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2.$$

(Figyeljük meg a szabályosságot: az indexek ciklikus cseréjét.)
Például:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 9{,}5$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 5 - 14 - 60 = -43$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} - 1 \cdot A_{34} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 185 - 62 = -244.$$

Az utolsó — negyedrendű — determináns értékét célszerűen harmadik sora szerint számítottuk („fejtettük") ki, figyelemmel arra, hogy A_{32} és A_{34} negatív.

A determinánsok értékének kiszámítása sok esetben lényegesen egyszerűsödik, ha kihasználjuk a determinánsok némely tulajdonságát. Ezek közül az alábbiakra emlékeztetünk.

1. A determináns értéke nem változik, ha minden sorának elemeit felcseréljük a megfelelő oszlopok elemeivel, azaz az elemeket a főátló (bal felső sarokból induló átló) körül átfordítjuk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ez azért fontos, mert így *mindazok a tételek, amelyeket sorokra állítunk, oszlopokra is érvényesek.*

2. Ha egy determináns két sorát (oszlopát) felcseréljük, akkor értéke *előjelet változtat.*

3. Ha egy determináns két sora (oszlopa) megegyezik, akkor értéke *zérus.*

4. Ha egy determináns valamelyik sorának (oszlopának) minden elemét megszorozzuk egy tetszőleges k számmal, akkor a determináns értéke is *k-szorosára változik.*

5. Ha egy determináns valamelyik sorának (oszlopának) elemeit két-két szám összegére bontjuk, a determináns is *két determináns összegére bontható:*

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & a_2 + \alpha_2 & a_3 + \alpha_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Az egyszerűség kedvéért a szabályt harmadrendű determinánson illusztráltuk; természetesen n-edrendű determinánsra is érvényes a szabály és más sorra (oszlopra) is,

továbbá egy determináns nemcsak két, hanem több determináns összegére is felbontható. Ha pedig visszafelé olvassuk az egyenlőséget, a determinánsok összeadásának szabályát nyerjük (két determináns csak akkor adható ily módon össze, ha csak egy megfelelő sorukban, illetve oszlopukban különböznek!)

6. A determináns értéke *nem változik*, ha egyik sorának (oszlopának) elemeihez egy másik sor (oszlop) elemeinek k-szorosát hozzáadjuk, pl.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Ha a determináns valamelyik sorának (oszlopának) elemeit egy másik sor (oszlop) megfelelő elemeinek adjungáltjaival szorozzuk és e szorzatokat összegezzük, *zérust* kapunk; például

$$a_{11}A_{i1} + a_{12}A_{i2} + a_{13}A_{i3} + \ldots + a_{1n}A_{in} = 0$$
$$(i \neq 1).$$

(Ha $i = 1$, akkor a determináns értékét kapjuk.)

8. *Determinánsok szorzása*

Két n-edrendű determináns szorzata ismét n-edrendű determinánsként írható:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & n_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

a $|c_{ik}|$ determináns elemeit a következő képlet alapján írhatjuk fel:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + a_{i3}b_{k3} + \ldots + a_{in}b_{kn},$$

azaz az egyik determináns i-edik sorának elemeit „komponáljuk" a másik determináns k-adik sorának elemeivel. Tekintettel arra, hogy mindkét determinánsban az oszlopok a sorokkal felcserélhetők, a kompozíció még a következő módokon is történhetik:

sort oszloppal,
oszlopot oszloppal,
oszlopot sorral;

a $|c_{ik}|$ determináns értéke minden esetben ugyanaz lesz.

Érdekes, hogy a determinánsok most felsorolt tulajdonságai közvetlenül beláthatók a harmadrendű determinánsok esetében, ha a vektoraritmetika eszközeit használjuk fel. Ugyanis az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

harmadrendű determináns felfogható, mint az

$$\mathbf{a}(a_1, \ a_2, \ a_3)$$
$$\mathbf{b}(b_1, \ b_2, \ b_3)$$
$$\mathbf{c}(c_1, \ c_2, \ c_3)$$

vektorok vegyes szorzata. A vegyes szorzat ismeretes tulajdonságaiból a felsorolt determinánstulajdonságok közvetlenül következnek; ezeket azután lehet n-edrendű determinánsokra általánosítani.

9. Ha az n-edrendű determináns elemei az x változó függvényei, akkor *a determináns deriváltja n* determináns összegével egyenlő; ezeket a determinánsokat az eredetiből úgy képezzük, hogy rendre az első, második, ..., n-edik sor elemeit azok deriváltjaival helyettesítjük:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \dots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \dots & f'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \dots & f'_{nn})x) \end{vmatrix}.$$

10. Ha a determináns minden elemét változónak tekintjük (és így az A determinánst egy n^2 változós függvénynek), akkor érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ik}} = A_{ik},$$

ahol A_{ik} az a_{ik} elem adjungáltja.

c) Matrixok fogalma. A rang

Legyen adva $m \cdot n$ számú elem, meghatározott sorrendben; írjuk le az első m elemet egy sorba, ezek alá a második m elemet a második sorba és így tovább. Ily módon az elemeknek n sorból (illetve m oszlopból) álló rendszerét nyerjük, melyet szögletes zárójelbe helyezve *matrixnak* nevezünk.

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ellentétben a determinánssal, a matrixnak nincs meghatározott számértéke: a matrix elemek rendszere, amelyre azután bizonyos műveleteket definiálhatunk.

A matrix bizonyos sorainak, illetve oszlopainak elhagyásával a matrix megmaradó elemeiből determinánsokat alkothatunk (ha pl. $n \leqq m$, akkor legfeljebb n-edrendű determinánsokat).

A lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatban csak a matrix *rangjának* fogalmára van szükségünk. Egy matrix r-edrangú, ha a belőle képezhető r-edrendű determinánsok nem mindegyike zérus, de az $(r + 1)$-edrendűek (és ezzel együtt a magasabbrendűek is) mind eltűnnek. Azt, hogy az $\boldsymbol{M}$ matrix r-edrangú, a következőképpen fogjuk jelölni:

$$R[\boldsymbol{M}] = r.$$

d) Lineáris inhomogén, határozott egyenletrendszerek megoldása

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból alkotott determináns értéke legyen a zérustól különböző A. Az x_i ismeretlen kiszámítása végett szorozzuk meg az egyenleteket rendre a determináns i-edik oszlopában álló elemek adjungáltjaival, majd adjuk össze az egyenleteket. A determinánsok 7. alatt jelzett tulajdonsága alapján lesz

$$A \cdot x_i = A_{1i}c_1 + A_{2i}c_2 + A_{3i}c_3 + \dots + A_{ni}c_n.$$

A jobb oldalon álló összeg szintén egy determináns, amely az A determinánsból úgy keletkezik, hogy az i-edik oszlop elemeinek helyébe a $c_1, c_2 \dots c_n$ konstansokat írjuk. Ha ezt a determinánst A_i-vel jelöljük, akkor

$$A \cdot x_i = A_i$$

és

$$x_i = \frac{A_i}{A}.$$

Például az

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ -x + y - 2z &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Pl. z kiszámítására szükséges A_z értéke

$$A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 6$$

és így

$$z = \frac{A_z}{A} = \frac{6}{2} = 3.$$

Hasonlóképpen számíthattuk volna ki x és y értékét is.

Megemlítjük, hogy az

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

háromismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása ekvivalens a következő vektoraritmetikai feladattal: a

$$\boldsymbol{d}(d_1, d_2, d_3)$$

vektor felbontandó az

$$\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$$

$$\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\boldsymbol{c}(c_1, c_2, c_3)$$

vektorok irányába eső összetevőkre, azaz meghatározandók az x, y, z számok úgy, hogy

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z = \boldsymbol{d}$$

legyen. Ez a vektoregyenlet skaláralakban írva három egyenletre bomlik, amelyek éppen a felírt egyenletrendszert alkotják. Vektorfeladatunknak mindig van megoldása, ha az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vektorok lineárisan függetlenek (nem esnek egy síkba) azaz az $\boldsymbol{abc}$ vegyes szorzat (ami éppen egyenletrendszerünk determinánsával egyenlő) nem zérus.

Nyilvánvaló, hogy a leírt eljárásmódnak — amit egyébként *Cramer-szabálynak* szokás nevezni — nincs értelme, ha $A = 0$.

Ha $A = 0$, akkor két eset lehetséges.

1. Az egyenletrendszerben ellentmondás van, mint pl. a következő példában:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 4. \end{aligned}$$

A harmadik egyenlet bal oldala ugyanis az első két egyenlet bal oldalának összege, míg a jobb oldalakra ez nem áll: az egyenletrendszer ellentmondó, nincs megoldása.

2. Az egyenletrendszer egy vagy több egyenlete az előzőkből következik, *nem mond újat,* a többi lineáris következménye. Például az

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 5z &= 3 \\ 6x + y + 2z &= 21 \end{aligned}$$

egyenletrendszer harmadik egyenletét úgy kapjuk, hogy az első egyenlet háromszorosához hozzáadjuk a másodikat; a harmadik egyenlet az első kettő „lineáris következménye" és így felesleges, elhagyható. A megmaradó két egyenlet azonban a három ismeretlen egyértelmű meghatározásához kevés, egyenletrendszerünk határozatlan és a későbbiekben tárgyalandó kategóriába tartozik.

e) Lineáris homogén egyenletrendszerek megoldása

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek egy magától értetődő *(triviális)* megoldása mindig van, ti.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Ha az egyenletrendszer determinánsa nem zérus,

$$A \neq 0,$$

akkor más megoldás nincs is; ha $A = 0$, de nem minden elem adjungáltja zérus (más kifejezésmóddal: az ismeretlenek együtthatóiból alkotott matrix rangja: $n - 1$),

akkor a megoldások egyetlen paraméter (folytonos) függvényeiként fejezhetők ki, esetünkben:

$$x_1 = t\alpha_1,\ x_2 = t\alpha_2,\ \ldots,\ x_n = t\alpha_n$$

alakú, ahol t tetszőleges *paraméter* ($t = 0$ is lehet, ami éppen a triviális megoldást szolgáltatja). A megoldást a következőképpen kapjuk: válasszuk ki az egyenletrendszer determinánsának egy olyan sorát, amelyben *nem minden elem adjungáltja zérus;* ha ez a sor pl. az i-edik, a megoldás

$$x_1 = A_{i1}t,\ x_2 = A_{i2}t,\ \ldots,\ x_n = A_{in}t.$$

Pl. az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(mert a determináns utolsó sorához az első két sort hozzáadva és a harmadik sort levonva, az utolsó sor minden eleméből zérus lesz).

A negyedik sor adjungáltjai:

$$A_{41} = 15,\ A_{42} = -3,\ A_{43} = -9,\ A_{44} = 0.$$

A megoldás tehát

$$x_1 = 15t,\ x_2 = -3t,\ x_3 = -9t,\ x_4 = 0.$$

Érdekes megjegyezni, hogy a háromismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszernek is megvan a vektoralgebrai jelentése. Az

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

skaláris egyenletrendszer vektoriális alakja

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z = 0$$

azt fejezi ki, hogy az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorokból megfelelő nyújtással (és esetleg ellenkező irányítással) olyan vektorok állíthatók elő, melyeknek eredője zérus, azaz a három vektorból lineáris műveletekkel zárt vektorháromszög képezhető. A triviális esettől eltekintve ($x = y = z = 0$, azaz mindhárom vektorból zérusvektort alkotunk), megoldás csak akkor lehetséges, ha a három vektor egysíkú, azaz

$$\boldsymbol{abc} = A = 0;$$

ekkor azonban nem egy, hanem végtelenül sok vektorháromszög képezhető. Ha ***a***, ***b***, ***c*** nem esnek egy egyenesbe, akkor e háromszögek egymáshoz hasonlók és a megoldások aránya állandó.

$$y : y : z = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3}.$$

Vegyük észre, hogy a homogén egyenletrendszer csak akkor tekinthető határozottnak, ha a triviálison kívül nincs megoldása. Valóban, ha $A = 0$, akkor a determinánsnak legalább is az utolsó sora az előzőkből következik, és így az utolsó egyenlet felesleges.

Abban az esetben, ha $A = 0$ és emellett $A_{ik} = 0$, azaz minden elem adjungáltja zérus (másképp: az egyenletrendszer matrixának rangja kisebb, mint $n - 1$), az egyenletrendszer többszörösen határozatlan (több, mint egy „független megoldásrendszer" létezik); ezt az esetet az alábbiakban tárgyaljuk.

f) Határozatlan és túlhatározott egyenletrendszerek*

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

homogén egyenletrendszernek mindig van a triviálistól különböző megoldása, ha $m < n$. A független (egymásból nem következő) megoldásrendszerek száma attól függ, hogy az ismeretlenek együtthatóiból alkotott matrix hányadrangú. Ha a matrix rangszáma r, a független megoldások száma $n - r$. Hogyan találhatók meg ezek?

Ha a matrix rangszáma r, akkor a belőle alkotható r-edrendű determinánsok között van zérustól különböző. Írjuk az egyenleteket, illetve az ismeretleneket olyan sorrendbe, hogy az első r egyenlet első r ismeretlenjének együtthatóiból alkotott determináns legyen zérustól különböző; a többi egyenletet egyszerűen elhagyjuk (mert azok már az első r-ből következnek). Mármost az

$$x_{r+1} = 1, \; x_{r+2} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$$

értékeket az egyenletekbe beírva, az $x_1, x_2, \dots, x_r$ ismeretlenekre nézve egy határozott inhomogén egyenletrendszert nyerünk, melyet a Cramer-szabály szerint megoldva, kapjuk az egyik független megoldásrendszert.

Az

$$x_{r+2} = 1, \; x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$$

értékek választásával hasonlóképpen kapjuk a második független megoldásrendszert és így tovább; végül az

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_{n-1} = 0, \; x_n = 1$$

választás szolgáltatja az $(n - r)$-edik független megoldásrendszert.

---

* Határozatlan az egyenletrendszer, ha az egyenletek száma kevesebb, mint az ismeretleneké; túlhatározott, ha több az egyenlet, mint az ismeretlen.

Foglaljuk az így nyert független megoldásrendszereket a következő táblázatba:

	x_1	x_2	.... x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	.... x_n
1)	α_{11}	α_{12}	α_{1r}	1	0	0
2)	α_{21}	α_{22}	α_{2r}	0	1	0
	......	......	....	......	......	....
$n-r$)	$\alpha_{n-r,\,1}$	$\alpha_{n-r,\,2}$	$\alpha_{n-r,\,r}$	0	0	1

Ezek után egyenletünk általános megoldása:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \dots + \lambda_{n-r}\alpha_{n-r,1} \\
x_2 &= \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \dots + \lambda_{n-r}\alpha_{n-r,2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_r &= \lambda_1\alpha_{1r} + \lambda_2\alpha_{2r} + \dots + \lambda_{n-r}\alpha_{n-r,r} \\
x_{r+1} &= \lambda_1 \\
x_{r+2} &= \lambda_2 \\
&\dots\dots \\
x_n &= \lambda_{n-r}
\end{aligned}
$$

($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$, tetszőleges paraméterek).

A gyakorlati számítás távolról sem olyan bonyolult, mint az előzők alapján látszik. Nézzük a következő példát:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
3x_1 \quad\;\; + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Szemmel látható, hogy az egyenletrendszer matrixának rangja 2, mert

1. a harmadik egyenlet az első kettő összege és így bármelyik harmadrendű determináns értéke zérus;

2. a másodrendű determinánsok között van zérustól különböző, így az első két egyenlet első két ismeretlenjének együtthatóiból alkotott determináns

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Legyen most $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$, ekkor

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -1, \\
2x_1 - x_2 &= -2,
\end{aligned}
$$

ahonnan $x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$

Hasonló módon, ha $x_4 = 1$, $x_3 = x_5 = 0$, akkor

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Végül

$$x_5 = 1, \qquad x_3 = x_4 = 0$$

esetén

$$x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

A független megoldásokat táblázatba gyűjtve

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1)	-1	0	1	0	0
2)	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0
3)	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1

felírhatjuk az általános megoldást

$$x_1 = -\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3$$

$$x_2 = \qquad -\frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3$$

$$x_3 = \lambda_1$$
$$x_4 = \lambda_2$$
$$x_5 = \lambda_3,$$

vagy — az egyszerűség kedvéért a

$$-\lambda_1 = k_1, \ -\frac{\lambda_2}{3} = k_2, \ -\frac{\lambda_3}{3} = k_3$$

jelöléseket bevezetve —

$$x_1 = k_1 + 2k_2 + 2k_3$$
$$x_2 = k_2 + k_3$$
$$x_3 = -k_1$$
$$x_4 = -3k_2$$
$$x_5 = -3k_3.$$

Számításunk helyességét próbáljuk ki pl. a $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ értékkel:

$$x_1 = 5, \ x_2 = 2, \ x_3 = -1, \ x_4 = -3, \ x_5 = -3.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ezek az értékek mindhárom megadott egyenletet kielégítik.

Az inhomogén határozatlan egyenletrendszernek

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \qquad (m < n)$$

nincs mindig megoldása.

Legyen az ismeretlenek együtthatóiból alkotott matrix M; jelöljük M'-vel azt a matrixot, amely M-ből úgy keletkezik, hogy ahhoz utolsó oszlopként hozzáírjuk a $c_1, c_2, \dots, c_m$ konstansokat. Az inhomogén határozatlan egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha M és M' rangszáma megegyezik:

$$R[M] = R[M'].$$

A független megoldások száma (ha M rangja r)

$$n - r.$$

Ezeket a következőképpen találjuk meg. Az egyenletek, illetve ismeretlenek megfelelő sorrendbe írásával elérhetjük, hogy

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ legyen.}$$

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$$

értékeket választva az $x_1, x_2, \dots, x_r$ ismeretlenek meghatározására, egy határozott inhomogén egyenletrendszert kapunk. Egyenletrendszerünk így nyert speciális megoldásából az általános megoldást úgy kapjuk, hogy hozzáadjuk a megfelelő homogén egyenletrendszer (a jobb oldalon csupa zérust írva) általános megoldását.

Például az

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10 \\ x - y + 2z - u &= 1 \\ x + 3y \qquad + 3u &= 19 \end{aligned}$$

egyenletrendszer

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrixának rangja: 2;

az

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 19 \end{bmatrix}$$

matrix rangja ugyancsak 2.

Az egyenletrendszerben tehát nincs ellentmondás, azonban az egyenletek közül csak kettő független; a független megoldások száma

$$4 - 2 = 2.$$

Elhagyván a felesleges harmadik egyenletet és — mert az első két egyenlet első két ismeretlenjének együtthatóiból alkotott determináns

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

— a $z = u = 0$ értékeket választva,

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 1, \end{aligned} \qquad \text{azaz } x = 5{,}5 \quad y = 4{,}5.$$

Mivel az

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ x - y + 2z - u &= 0 \end{aligned}$$

homogén egyenletrendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} x &= -1{,}5\,\lambda \\ y &= 0{,}5\,\lambda - \mu \\ z &= \lambda \\ u &= \mu, \end{aligned}$$

a megadott inhomogén egyenletrendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} x &= 5{,}5 - 1{,}5\,\lambda \\ y &= 4{,}5 + 0{,}5\,\lambda - \mu \\ z &= \lambda \\ u &= \mu. \end{aligned}$$

Pl. $\lambda = 1$, $\mu = -1$ esetén

$$x = 4,\ y = 6,\ z = 1,\ u = -1.$$

MINTAPÉLDÁK ÉS GYAKORLÓ FELADATOK

α) A determinánsok számítástechnikája

Számítsuk ki a következő harmadrendű determinánsok értékét; mindegyik példában más sor, illetve oszlop szerint végezzük el a kifejtést.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1{,}2 & 3{,}1 & 2 \\ -4 & 1{,}3 & -2{,}1 \\ 3 & 1 & -2{,}3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$

7. A determinánsok értékének kiszámítása nélkül döntsük el, hogy milyen összefüggésben áll egymással a következő két determináns:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 \\ 2 & -6 & 0 & 5 \\ -5 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 12 & 0 \end{vmatrix}.$$

A determináns értékének kiszámítása során néhány, a determinánsok tulajdonságain alapuló egyszerű fogással megkönnyíthetjük feladatunkat. Így például aszerint a sora (oszlopa) szerint fejtjük ki, amely szerint a legkönnyebb (pl. zérus elemeket tartalmaz).

8. Kiszámítandó a következő negyedrendű determináns értéke:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

* * *

Első pillantásra nyilvánvaló, hogy a determinánst harmadik sora szerint célszerű kifejteni, mert abban két elem zérus; további előny, hogy ebben a sorban van az egyetlen tört-elem és így a kifejtés során fellépő adjungáltak elemei már egész számok. Lesz tehát

$$A = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

A harmadrendű determinánsok közül az elsőt második oszlopa szerint fejtjük ki, mert annak elemei nagyobb számok, mint pl. a harmadik soré; ugyanígy a második determinánst.

$$A = -\frac{1}{2}\left\{3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}\right\} + 5\left\{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-9 - 6) + 5(1 + 2) = 22{,}5.$$

A legelőnyösebb, ha valamelyik sor (oszlop) elemei egy kivételével zérusok. Ezért arra törekszünk (különösen magasabbrendű determinánsoknál), hogy megfelelő (és természetesen a determináns értékét meg nem változtató) átalakítással ilyen alakra jussunk.

9. Alakítsuk át egyszerűbbre és számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

* * *

Önmaguktól kínálkoznak a következő lépések:

1. a harmadik oszlop elemeit adjuk hozzá az első, illetve negyedik oszlop elemeihez;
2. a harmadik oszlop elemeinek kétszeresét adjuk hozzá a második oszlop elemeihez.

Így

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 4 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}.$$

További átalakítás: a második sor háromszorosát adjuk hozzá az első sorhoz, hatszorosát pedig a harmadik sorhoz:

$$A = - \begin{vmatrix} 0 & 17 & 22 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 38 & 52 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & 22 \\ 38 & 52 \end{vmatrix} = -48.$$

Sok esetben megkönnyíti a számítást, ha a determináns valamelyik sorából (oszlopából) a közös tényezőt kiemeljük; különösen hasznos ez az eljárás, ha a determináns elemei törtek.

10.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 9 & -3 & 6 \\ 8 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

* * *

Az első sorból kettőt, a másodikból hármat, a harmadikból négyet kiemelve

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 672.$$

11.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{7} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{5} \end{vmatrix}.$$

* * *

Minden sorból kiemelve a nevezők legkisebb közös többszörösének reciprokát:

$$A = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 15 & -40 & 12 \\ 6 & 21 & 7 \\ 15 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{12\,600} \cdot 3 \begin{vmatrix} 5 & -40 & 12 \\ 2 & 21 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4200} \begin{vmatrix} 0 & -40 & 6 \\ 2 & 21 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2100} \begin{vmatrix} 0 & -20 & 3 \\ 2 & 21 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2100} (-700 - 315 + 240) = -\frac{775}{2100} = -\frac{31}{84}.$$

A bemutatott átalakításokat felhasználva, számítsuk ki a következő determinánsok értékeit:

12.
$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 10 \\ -11 & +2 & 10 \\ -2 & -14 & -5 \end{vmatrix}$$

13.
$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & -2 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

14.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 7 & -3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

15.
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

16.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 & 6 \\ 15 & -10 & 7 & 5 & -12 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & 21 \\ 6 & 3 & 9 & 24 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket:

17.
$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

18.
$$P = \begin{vmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}$$

19.
$$P = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

20.
$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

21.
$$P = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Megjegyzés: csak egyenlő rendszámú determinánsok szorozhatók össze közvetlenül, ezért a második tényezőt értékének megváltozása nélkül harmadrendűvé kell átalakítani. Hogyan lehetséges ez?

22.
$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}^2$$

β) Különleges determinánsok

Kiszámítandók a következő determinánsok:

1.
$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

2.
$$A = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+u \end{vmatrix}$$

3.
$$A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & y & 1 & 0 \\ 0 & -1 & z & 1 \\ 0 & 0 & -1 & u \end{vmatrix}$$

Bizonyítandók a következő azonosságok:

4.
$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

5.
$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \cos(\beta-\gamma) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos(\beta+\gamma) & \cos(\gamma+\alpha) \\ \sin(\alpha+\beta) & \sin(\beta+\gamma) & \sin(\gamma+\alpha) \end{vmatrix} =$$
$$= -2\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\beta-\gamma)\cdot\sin(\gamma-\alpha).$$

6.
$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1-x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ha } n > 2.$$

7.
$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix} = a_n A_{n-1} + A_{n-2},$$

ahol A_{n-1} és A_{n-2} ugyanolyan típusú determinánsok, mint A_n.

8.
$$A(x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = f(x) - x\cdot f'(x),$$

ahol $f(x) = a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)$.

9.
$$F(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = A + x\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik},$$

ahol $A = F(0)$ és A_{ik} az A determináns a_{ik} elemének adjungáltja. Útbaigazítás: írjuk fel az $F(x)$ függvény Taylor-sorát.

10. Bizonyítsuk be, hogy minden racionális egész függvény determináns alakjában írható a következő módon:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy a következő determináns értéke zérus, ha az $x_1, x_2, \dots x_n$ elemek között van két egyenlő értékű.

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \textit{(Van der Monde-determináns).}$$

12. Bizonyítandó, hogy az A determináns elemeinek adjungáitjaiból alkotott determináns

$$|A_{ik}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = A^{n-1}.$$

Útbaigazítás: szorozzuk meg mindkét oldalt A-val.

γ) Lineáris inhomogén egyenletrendszerek

1. $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 5 \\ -x + 3y - 4z &= -5. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 3 \\ x - 6y + 2z &= -1 \\ 4x + 3y - 8z &= 1. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} - z &= 2 \\ x - \frac{y}{6} + \frac{z}{2} &= 2 \\ -\frac{x}{3} + y - \frac{z}{3} &= 2. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 2x - y + 3z + u &= -5 \\ -x + y - 2z + u &= -1 \\ x + y + 5u &= 7 \\ y - z + 3u &= 3. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x - 3y + z + u &= 6 \\ x + 2y - 4z &= 4 \\ 3x - y - 3z - u &= -2 \\ 12x - 4y - 12z &= 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés: 3-nál több ismeretlen esetén a megoldás nehézkessé válik. Célszerű ezért előbb az ismeretlenek számát csökkenteni. Ha a fenti egyenletek közül a másodikat hozzáadjuk a harmadikhoz, továbbá a második kétszeresét az elsőhöz, háromismeretlenes egyenletrendszerünk marad.

6. $x + y = 3 \quad y + z = 5 \quad z + u = 7 \quad u + v = 9 \quad v + x = 6.$

A következő egyenletek nem lineárisak, de megoldásuk új változó bevezetésével lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza

7. $$\begin{aligned} uv - 3vw + w &= -13 \\ -3uv + 4vw - 2w &= 12 \\ 2uv + vw &= 10 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 3uv + vw + 2wu - 7uvw &= 0 \\ -uv + 3vw - wu + 10uvw &= 0 \\ 5uv - 3wu + 4uvw &= 0. \end{aligned}$$

9. A $\mathbf{v}(-3, 13, -8)$ vektor felbontandó a következő vektorokkal párhuzamos összetevőkre:

$$\mathbf{a}(2, 3, -1)$$
$$\mathbf{b}(3, -2, 1)$$
$$\mathbf{c}(-1, 4, -3).$$

Melyik pontban metszik egymást a következő síkok:

10.
$$\begin{aligned} 3x + y + 7z &= 11 \\ 2x - 3y + 5z &= 4 \\ 5x - 2y + 10z &= 13 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x + y - z - 4 &= 0 \\ 2x - 3y + z + 5 &= 0 \\ 4x - y - z + 3 &= 0. \end{aligned}$$

12. Mi az egyenlete annak a kúpszeletnek, mely a következő pontokon megy át:

$$P_1(0, 1), \quad P_2(1, 0), \quad P_3\left(3, -\frac{1}{2}\right), \quad P_4(-2, -3), \quad P_5(-3, -2).$$

Útmutatás: a kúpszelet általános egyenletébe

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

beírván a megadott pontok koordinátáit, öt egyenletet kapunk; mivel a 6 konstans egyikével végigoszthatunk (feltéve, hogy az nem zérus!) a nyert egyenletrendszer a konstansok kiszámítására elégséges.

Megoldandók a következő határozatlan egyenletrendszerek:

13.
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 7 \\ 2x - y + 3z &= 14. \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10 \\ 2x - y + 2z - 3u &= -6 \\ x - 2y + z - 4u &= -16. \end{aligned}$$

15. Három sík egyenlete

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x - 3y + \lambda z &= \mu. \end{aligned}$$

Meghatározható-e λ és μ oly módon, hogy

a) a három sík egy egyenesben messe egymást;

b) a három síknak ne legyen közös pontja?

δ) Lineáris homogén egyenletrendszerek

1.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 3x - 2y + 2z &= 0 \\ 6x + 4y + 5z &= 0. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 8x + 3y + 5z &= 0. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} &= 0 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} &= 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{7y}{12} - \frac{3z}{4} &= 0. \end{aligned}$$

4. Meghatározandó λ úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek legyen a triviálistól különböző megoldása:

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 3z &= 0 \\ 3x - 2y \phantom{{}- 3z} &= 0 \\ 4x + 3y + \lambda z &= 0. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x + 2y - z \quad &= 0 \\ y + 2z - u &= 0 \\ -x \quad + z + 3u &= 0 \\ x + 2y - 5z + 5u &= 0. \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x + y - z + u &= 0 \\ 2x + 3y + z - 2u &= 0 \\ -x + 2y - 3z + u &= 0 \\ 2x + 6y - 3z + u &= 0. \end{aligned}$$

7. Meghatározandó az alábbi síkok metszésvonala

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ -x + 5y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} 3x + y - 5z &= 0 \\ 6x + 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} 2x + y - 2z + 2u &= 0 \\ 8x + 4y - 8z + u &= 0 \\ 6x + 3y - 6z - u &= 0. \end{aligned}$$

ε) Vegyes példák

1. Ha az x, y, z változók helyett az u, v, w változókat vezetjük be az

$$\begin{aligned} x &= a_1u + a_2v + a_3w \\ y &= b_1u + b_2v + b_3w \\ z &= c_1u + c_2v + c_3w \end{aligned}$$

összefüggések alapján, akkor lineáris transzformációt végzünk (a fogalmat az egyszerűség kedvéért csak három változóra szemléltettük). Fejezzük ki az új változókat a régiek segítségével!

2. A síkbeli derékszögű koordinátarendszert az origó körül α szöggel elforgatva, valamely P pont régi (x, y) és új (x', y') koordinátái között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

Ez nyilván lineáris transzformáció. Fejezzük ki az új koordinátákat a régiekkel, ha $\alpha = 45°$.

3. Megállapítandók a térbeli koordinátarendszer elforgatásának transzformációs formulái! (Azaz: mi az összefüggés egy P pont eredeti x, y, z és az elforgatás utáni x', y', z' koordinátái között?)

4. Ismeretes, hogy a kúpszeletek általános egyenlete

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

továbbá az együtthatókból alkotott determináns

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

a kúpszeletre jellemző. Igazoljuk, hogy A és A_{33} értéke nem változik (invariáns), ha a koordinátarendszert elforgatjuk. Válasszuk konkrét példának az

$$5x^2 + 6xy - 3y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$$

kúpszeletet,

Ismeretes, hogy a kúpszelet *invariánsaiból*

$$I_1 = -(a_{11} + a_{22}), \quad I_2 = A_{33}, \quad I_3 = A$$

(l. az előző példát) a kúpszelet jellege megállapítható. Megállapítható az alábbi kúpszeletek jellege.

5. $$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 1 = 0.$$

6. $$\sqrt{2x} + \sqrt{y} = 1.$$

Ismeretes, hogy a középpontos kúpszeletek (ellipszis, hiperbola) egyenletét a szimmetriatengelyekre transzformálva, az új egyenlet

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_3 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

ahol I_2 és I_3 a kúpszelet ismeretes invariánsai, λ_1 és λ_2 pedig a következő, determinánsalakban felírt, ún. *karakterisztikus egyenlet* gyökei:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A kúpszelet centrumának koordinátái pedig

$$x_c = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_c = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Ezek alapján állapítsuk meg az alábbi kúpszeletek adatait:

7. $$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80x + 40y + 80 = 0.$$

8. $$x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Mekkora a következő parabolák paramétere $\left(p = \sqrt{\frac{I_3}{I_1^3}}\right)$?

9. $$x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 2y + 10 = 0.$$

10. $$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 10y + 3 = 0.$$

EREDMÉNYTÁR

ELSŐ RÉSZ

1. §. A vektoralgebra alapfogalmai és tételei. Geometriai és egyéb feladatok vektoralgebrai megoldása közvetlen úton (koordináták nélkül)

α) Síkgeometriai feladatok

1. *a)* Legyen AH és BH távolságok viszonya λ, ekkor

$$\overrightarrow{CH} - \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} - \overrightarrow{CH})$$

$$\overrightarrow{CH} = \frac{\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a}}{1 + \lambda} \perp \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},$$

következésképpen

$$(\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$$

$$\boldsymbol{ab} + \lambda\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 - \lambda\boldsymbol{ab} = 0 \qquad (\boldsymbol{ab} = 0)$$

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2} = \frac{b^2}{a^2};$$

$$AH = BH, \quad \text{ha} \quad \lambda = 1, \quad \text{azaz} \quad a = b.$$

b) Felhasználva λ kiszámított értékét

$$\overrightarrow{CH} = \frac{a^2\boldsymbol{b} + b^2\boldsymbol{a}}{a^2 + b^2}.$$

c) $$\overrightarrow{CH}^2 = \frac{a^4\boldsymbol{b}^2 + 2a^2b^2\boldsymbol{ab} + b^4\boldsymbol{a}^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^4b^2 + a^2b^4}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Innen

$$CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. $\overrightarrow{CD}$ vektorra a következő összefüggés írható fel ($\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$):

$$\overrightarrow{CD} - \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} - \overrightarrow{CD}),$$

ahol — elemi geometriai összefüggés alapján —

$$\lambda = \frac{b}{a},$$

tehát

$$\overrightarrow{CD} = \frac{a\boldsymbol{b} + b\boldsymbol{a}}{a+b}.$$

Innen

$$\overrightarrow{CD}^2 = \frac{a^2\boldsymbol{b}^2 + 2ab\boldsymbol{ab} + b^2\boldsymbol{a}^2}{(a+b)^2}.$$

Helyettesítve az $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cdot \cos \gamma$ értéket

$$\overrightarrow{CD}^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cos \gamma}{(a+b)^2} = \frac{2a^2b^2\,(1 + \cos \gamma)}{(a+b)^2} = \frac{4a^2b^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2},$$

következőleg

$$CD = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

3. Legyen $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$, ekkor

$$\overrightarrow{CA'} = \lambda\boldsymbol{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CB'} = \lambda\boldsymbol{a},$$

következőleg

$$\overrightarrow{AB'} = \lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BA'} = \lambda\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}.$$

Ezek hosszának egyenlőségéből

$$(\lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = (\lambda\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2,$$

illetve

$$(\lambda^2 - 1)(a^2 - b^2) = 0;$$

$\lambda^2 \neq 1$ esetén ($\lambda^2 = 1$-et kizárjuk)

$$a = b,$$

vagyis a háromszög valóban egyenlőszárú.

4. Legyen

$$\overrightarrow{SA} = \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{SB} = \boldsymbol{r}_2, \quad \overrightarrow{SC} = \boldsymbol{r}_3;$$

a területek egyenlőségének feltétele

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1.$$

Beírván az $\boldsymbol{r}_1 = \lambda\boldsymbol{r}_2 + \mu\boldsymbol{r}_3$ értéket,

$$(\lambda\boldsymbol{r}_2 + \mu\boldsymbol{r}_3) \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3, \qquad \text{innen } \mu = -1,$$

$$\boldsymbol{r}_3 \times (\lambda\boldsymbol{r}_2 + \mu\boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3, \qquad \text{innen } \lambda = -1,$$

azaz valóban

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}.$$

S a háromszög súlypontja. Ha ugyanis a háromszög csúcspontjainak helyzetvektorai $\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{r}_b$, $\boldsymbol{r}_c$, akkor a súlyponté

$$\boldsymbol{r}_s = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{r}_b + \boldsymbol{r}_c)$$

és

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_s, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_s, \quad \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{r}_s,$$

tehát

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{r}_b + \boldsymbol{r}_c - 3\boldsymbol{r}_s = 0.$$

5. Ha a háromszög oldalvektorai:

$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$ és így a súlyvonal-vektorok

$$\boldsymbol{s}_a = \frac{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}}{2}, \quad \boldsymbol{s}_b = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}}{2}, \quad \boldsymbol{s}_c = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2},$$

akkor

$$\boldsymbol{s}_a^2 + \boldsymbol{s}_b^2 + \boldsymbol{s}_c^2 = \frac{1}{4}(2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{c}^2 - 2\boldsymbol{ab} - 2\boldsymbol{bc} - 2\boldsymbol{ca}) =$$

$$= \frac{1}{4}[3(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2) - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2].$$

Mivel $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, lesz

$$\boldsymbol{s}_a^2 + \boldsymbol{s}_b^2 + \boldsymbol{s}_c^2 = \frac{3}{4}(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2).$$

Általános esetben a súlyvonal-vektorok helyébe a következő vektorok lépnek:

$$\boldsymbol{v}_a = \frac{\boldsymbol{c} - \lambda\boldsymbol{b}}{1 + \lambda}, \quad \boldsymbol{v}_b = \frac{\boldsymbol{a} - \lambda\boldsymbol{c}}{1 + \lambda}, \quad \boldsymbol{v}_c = \frac{\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}}{1 + \lambda}$$

és

$$\boldsymbol{v}_a^2 + \boldsymbol{v}_b^2 + \boldsymbol{v}_c^2 = \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

6. Ha $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$, akkor

$$\boldsymbol{p}_a = \frac{\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}}{3} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{q}_a = \frac{\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b}}{3}$$

és így

$$\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{q}_a^2 = \frac{1}{9}[(\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})^2 - (\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b})^2] = \frac{1}{3}(\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2).$$

Más megoldás: ABC és $AA'A''$ háromszögek A-ból kiinduló súlyvonalai közösek, ezért

$$\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}.$$

Továbbá

$$\overrightarrow{A''A'} = \boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{q}_a = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}),$$

tehát

$$p_a^2 - q_a^2 = (p_a + q_a)(p_a - q_a) = \frac{1}{3}(c^2 - b^2).$$

7. $$T = \frac{1}{2}|(r_2 - r_1)\times(r_3 - r_1)| = \frac{1}{2}[|r_1\times r_2| + |r_2\times r_3| + |r_3\times r_1|].$$

8. Legyen az a és b vektorok által meghatározott háromszög területe T, akkor

$$2T = |a\times b|$$

$$4T^2 = (a\times b)^2 = a^2b^2 - (ab)^2.$$

A háromszög harmadik oldalvektora

$$c = a - b$$

és felhasználván a

$$2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$$

azonosságot, lesz

$$4T^2 = a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2s\cdot 2(s - c)\cdot 2(s - b)\cdot 2(s - a) =$$

$$= 4s(s - a)(s - b)(s - c),$$

azaz

$$T = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

9. Legyen $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{CA} = b$;

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} : \sin\alpha = \frac{c\cdot(-b)}{cb\sin\alpha} = -\frac{bc}{2t};$$

$$\operatorname{cotg}\beta = -\frac{ca}{2t};\quad \operatorname{cotg}\gamma = -\frac{ab}{2t}.$$

Ebből

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = -\frac{bc + ca + ab}{2t} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c)^2}{4t} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}.$$

(Ui. $a + b + c = 0$.)

10. A háromszög területét t-vel jelölve

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{(b - a)(c - a)}{2t} = \frac{a^2}{2t}$$ (l. a 9. feladatot),

mert $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ca} = 0$; hasonlóan

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{b^2}{2t}; \quad \operatorname{cotg}\gamma = \frac{c^2}{2t}.$$

Ezekből az összefüggésekből az állítás következik.

11. A, B, C, D pontok helyzetvektorai legyenek $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$; ha M és N az AB, illetve CD oldalak felező pontjai, akkor

$$MN = \boldsymbol{r}_N - \boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4}{2} - \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2} = \frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2}{2} + \frac{\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1}{2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Ha $ABCD$ olyan trapéz, melynek párhuzamos oldalai BC és AD, továbbá $\overrightarrow{BC}$-nek és $\overrightarrow{AD}$-nek egyező irányítást adunk, akkor a

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$$

összefüggésből következik, hogy $\overrightarrow{MN}$ iránya is ugyanaz, következésképpen

$$MN = \frac{BC + AD}{2}.$$

12. Legyen $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{r}_2$,

ekkor

$$\overrightarrow{OB} = \lambda\boldsymbol{r}_1 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OC} = \mu\boldsymbol{r}_2,$$

ahol

$$\lambda > 1 \quad \text{és} \quad \mu > 1;$$

továbbá

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \lambda\boldsymbol{r}_1) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \mu\boldsymbol{r}_2);$$

$$OMN_{ter} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}| = \frac{1}{8}|(\boldsymbol{r}_2 + \lambda\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_1 + \mu\boldsymbol{r}_2)| = \frac{1}{8}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|\cdot(\lambda\mu - 1).$$

$$ABCD_{ter} = OBC_{ter} - OAD_{ter} = \frac{1}{2}|\lambda\boldsymbol{r}_1\times\mu\boldsymbol{r}_2| - \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2| =$$

$$= \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|\cdot(\lambda\mu - 1).$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

13. Legyen $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{q}$, ekkor

$$\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BN} = \boldsymbol{q} - \frac{2}{3}\boldsymbol{p}.$$

Legyen a kérdéses szakaszok metszéspontja K, ekkor

$$\overrightarrow{AK} = \lambda\cdot\overrightarrow{AM} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BK} = \mu\cdot\overrightarrow{BN}.$$

Érvényes a következő összefüggés:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK},$$

azaz

$$\boldsymbol{p} + \mu\left(\boldsymbol{q} - \frac{2}{3}\boldsymbol{p}\right) = \lambda\left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\right)$$

$$\boldsymbol{p}\left(1 - \frac{2}{3}\mu - \lambda\right) + \boldsymbol{q}\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda\right) = 0,$$

$$1 - \frac{2}{3}\mu - \lambda = 0 \quad \text{és} \quad \mu - \frac{1}{2}\lambda = 0$$

alapján

$$\lambda = \frac{3}{4} \quad \text{és} \quad \mu = \frac{3}{8},$$

tehát

$$AK : KM = 3 : 1 \quad \text{és} \quad BK : KN = 3 : 5.$$

14. *a)* *MNPQ* négyzet, ha

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b},$$

továbbá

$$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{NP} \quad \text{és} \quad MN = NP.$$

De ekkor

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{MB} = \lambda\boldsymbol{a},$$

amiből

$$\overrightarrow{PC} = (1 - \lambda)\boldsymbol{a}.$$

Hasonlóképpen

$$\overrightarrow{NC} = (1 - \mu)\boldsymbol{b},$$

így

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{PC} = (1 - \mu)\boldsymbol{b} - (1 - \lambda)\boldsymbol{a}.$$

Mivel $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{NP}$, lesz

$$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b})\,[(1 - \mu)\boldsymbol{b} - (1 - \lambda)\boldsymbol{a}] = 0.$$

Felhasználván, hogy $\boldsymbol{ab} = 0$ és $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$,

a

$$\mu(1 - \mu) - \lambda(1 - \lambda) = 0,$$

vagy másként

$$(\mu - \lambda)\,(1 - \lambda - \mu)$$

egyenlőségre jutunk.

Figyelembe véve még az $MN = NP$ feltételt, *MNPQ* négyzet, ha $\mu + \lambda = 1$.

b) A feltétel: $\lambda = \mu$.

15. Ha $\boldsymbol{i}$ az egyenesre merőleges egységvektor, akkor

$$\overrightarrow{P_kA_k} = (\boldsymbol{i}\boldsymbol{r}_k)\,\boldsymbol{i}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{r}_k = \overrightarrow{OA_k}.$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P_k A_k} = \left(\boldsymbol{i} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \right) \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}.$$

Könnyen belátható ugyanis, hogy

$$\sum_{k=1} \boldsymbol{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k} = \boldsymbol{0}.$$

Ez ugyanis olyan vektor, mely nem változhatik meg, ha a szabályos sokszöget középpontja körül $\frac{2\pi}{n}$ -nél elforgatjuk, következőleg csak zérusvektor lehet.

β) Térgeometriai feladatok

16. Mindkét összetevő zérus, mert mint könnyen belátható, $AB \perp SC$.

A szabályos háromoldalú gúlában ugyanis

$$SA = SB = SC = s \quad \text{és} \quad ASB\sphericalangle = BSC\sphericalangle = CSA\sphericalangle = \varphi,$$

tehát

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\,(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} =$$
$$= s^2 \cdot \cos\varphi - s^2 \cdot \cos\varphi = 0.$$

Megjegyzés: a bizonyításból az is kitűnik, hogy a szabályos háromoldalú gúlánál bármelyik átellenes élpár merőleges egymásra.

17. Ha az A, B, C, D pontok helyzetvektorai $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$, akkor a bizonyítandó egyenlőség a következő alakban írható:

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1) + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_4) = 0.$$

Az egyenlőség a műveletek elvégzésével egyszerűen igazolható.

Ha $ABCD$ egy tetraéder csúcspontjai, akkor az átellenes élvektorok

$$\overrightarrow{AB} \text{ és } \overrightarrow{CD}, \ \overrightarrow{AC} \text{ és } \overrightarrow{BD}, \ \overrightarrow{AD} \text{ és } \overrightarrow{BC}.$$

Legyen pl. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, azaz

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

De ekkor a bizonyított egyenlőség következtében egyúttal

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \text{tehát} \quad \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}.$$

18. Az $OABC$ tetraéderben legyen

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c},$$

ekkor

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

A megadott összefüggés bizonyítása így egyértelmű a következő azonosság igazolásával:

$$2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2 - \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2.$$

A műveletek elvégzése után az azonosság helyessége kétségtelen.

19. Legyen $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$. $(\boldsymbol{abc} \neq 0)$

AA' és BB' magasságok metsződnek, ha az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok komplanárisak.

Figyelembe véve, hogy

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{AA'} \parallel \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \qquad \overrightarrow{BB'} \parallel \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},$$

a komplanáritás feltétele így írható:

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = 0;$$

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{abc}) = 0, \quad \text{ebből} \quad \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ac}.$$

De

$$\boldsymbol{bc} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2]$$

és

$$\boldsymbol{ac} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2];$$

ezek egyenlőségéből

$$\boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2 = \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2,$$

azaz

$$OA^2 + BC^2 = OB^2 + CA^2.$$

Két másik magasság vizsgálatából nyerjük, hogy

$$OB^2 + CA^2 = OC^2 + AB^2.$$

A tetraéder magasságai egy pontban való metsződésének szükséges és elégséges feltétele tehát: az átellenes élek négyszögei egyenlők legyenek.

20. Legyenek a tetraéder valamelyik csúcsából kiinduló élvektorok $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, a megfelelő átellenes élvektorok $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$. Ismeretes, hogy

$$6V = |\boldsymbol{abc}|.$$

Felhasználván most a 35. feladat eredményét

$$(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c})$$

$$36\,V^2 = (\boldsymbol{abc})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ba} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}.$$

Alkalmazván még a

$$2\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = a^2 + b^2 - c'^2 \text{ stb.}$$

összefüggéseket, lesz

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & a^2+c^2-b'^2 \\ b^2+a^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ c^2+a^2-b'^2 & c^2+b^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

21.
$$V = |\mathbf{abc}| = \overset{+}{\sqrt{(\mathbf{abc})^2}} = \overset{+}{\sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{ab} & \mathbf{ac} \\ \mathbf{ba} & \mathbf{b}^2 & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ca} & \mathbf{cb} & \mathbf{c}^2 \end{vmatrix}}} =$$

$$= \overset{+}{\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}}} = abc \cdot \overset{+}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}}}.$$

γ) *Azonosságok igazolása*

22. Az igazolás a műveletek elvégzésével történik, a geometriai jelentés: bármelyik parallelogrammában az átlókra rajzolt négyzetek területeinek összege annyi, mint az oldalakra rajzolt négyzetek területeinek összege.

23. A feltétel szerint

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{c})^2.$$

Egy oldalra rendezve

$$\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 - \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{bc} - \mathbf{c}^2 = 0.$$

Adjuk hozzá

$$\mathbf{ac} - \mathbf{ac} = 0.$$

Összevonás és kiemelés után

$$(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{a}+\mathbf{c}-2\mathbf{b}) = 0,$$

amiből az állítás következik.

24. A feltétel értelmében

$$\mathbf{ab} = \mathbf{bc} = \mathbf{ca} = 0.$$

Szorozzuk meg az

$$\mathbf{m} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

egyenlőséget skalárisan $\mathbf{a}$, majd $\mathbf{b}$, végül $\mathbf{c}$-vel, nyerjük az

$$\mathbf{ma} = \alpha\mathbf{a}^2,\quad \mathbf{mb} = \beta\mathbf{b}^2,\quad \mathbf{mc} = \gamma\mathbf{c}^2$$

összefüggéseket, amelyek alapján

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{ma}}{a^2}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{mb}}{b^2}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{mc}}{c^2}\mathbf{c}.$$

25. Az egyik vektorpár $\overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{MC}$, a másik $\overrightarrow{MB}$ és $\overrightarrow{MD}$. Ha most a jelölés

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a},\quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{b},\quad \overrightarrow{MA} = \mathbf{c},$$

akkor

$$\overrightarrow{MC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}; \quad \overrightarrow{MB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}; \quad \overrightarrow{MD} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

és a feladatok a következő összefüggések igazolására redukálódnak:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

b) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2 + \boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2,$

ahol

$$\boldsymbol{ab} = 0.$$

A műveletek elvégzése az összefüggések helyességét igazolja.

26. Feltételezve, hogy egyik vektor sem zérusvektor,

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}.$$

Ha most $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ kollineárisak, azaz

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},$$

akkor

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

tehát $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ valóban komplanárisak.

27. Ha $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}$ és $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ kollineárisak, akkor

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

Márpedig

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}) =$$
$$= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) - [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})] = 0$$

(a megadott feltételek felhasználásával).

28. Az

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$$

összefüggésből következik, hogy

$$(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_3)\times\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0},$$

azaz

$$\boldsymbol{r}_2 = \lambda(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_3).$$

Ezt az értéket az

$$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$$

összefüggésbe helyettesítve, nyerjük, hogy

$$\lambda = -1.$$

Ha $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{SA}$, $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{SB}$ és $\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{SC}$, akkor S az ABC háromszög súlypontja.

29. Felhasználván a vegyes szorzatnak azt a tulajdonságát, hogy zérussal egyenlő, ha két tényezője egyezik

$$\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} \times \frac{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{2}\right)\frac{\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}}{2} = \frac{1}{8}\left[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right](\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) =$$
$$= \frac{1}{8}(\boldsymbol{abc} + \boldsymbol{bca}) = \frac{1}{4}\boldsymbol{abc},$$

amivel az állítást igazoltuk.

Geometriai jelentés: legyenek $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ az $OABC$ tetraéder O-ból kiinduló élvektorai ($\boldsymbol{abc}$ tudvalevőleg a tetraéder köbtartalmának hatszorosát adja); ekkor

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}, \quad \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}, \quad \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2}$$

a tetraéder O-ban találkozó lapjainak súlyvonal-vektorai. A bizonyított egyenlőség tehát azt jelenti, hogy a súlyvonal-vektorok által meghatározott tetraéder térfogata az eredeti tetraéder térfogatának negyedrésze (ami egyébként a szemlélet alapján is nyilvánvaló). Megjegyzés: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ nem komplanárisak!

30. A vegyes szorzatot a disztributív tulajdonság alapján kifejtve és elhagyván a zérussal egyező tagokat (amelyekben két tényező egyezik):

$$\begin{aligned}(\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}+\nu_1\boldsymbol{c})(\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}+\nu_2\boldsymbol{c})(\lambda_3\boldsymbol{a}+\mu_3\boldsymbol{b}+\nu_3\boldsymbol{c}) &= \\ = \lambda_1\mu_2\nu_3\boldsymbol{abc}+\lambda_1\nu_2\mu_3\boldsymbol{acb}+\mu_1\lambda_2\nu_3\boldsymbol{bac}&+ \\ +\mu_1\nu_2\lambda_3\boldsymbol{bca}+\nu_1\lambda_2\mu_3\boldsymbol{cab}+\nu_1\mu_2\lambda_3\boldsymbol{cba} &= \\ = \boldsymbol{abc}[\lambda_1(\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2)+\lambda_2(\mu_3\nu_1-\mu_1\nu_3)+\lambda_3(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)]&.\end{aligned}$$

Mivel a szögletes zárójelben éppen a

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3\end{vmatrix}$$

determináns kifejtett értéke áll, az összefüggést igazoltuk.

31. Három vektor komplanáris, ha vegyes szorzatuk zérus:

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})(\nu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{c})(\mu\boldsymbol{c}-\nu\boldsymbol{a}) &= \\ = \lambda\nu\mu\boldsymbol{abc}-\mu\lambda\nu\boldsymbol{bca} &= \\ = \boldsymbol{abc}(\lambda\mu\nu-\lambda\mu\nu) &= 0.\end{aligned}$$

32. *a)* Használjuk fel a kifejtési tételt:

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{bd})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{bc})\boldsymbol{d}.$$

b) A kifejtési tétel felírt képletében legyen

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{d}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}.$$

c) Használjuk fel, hogy

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = [(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}]\boldsymbol{b}-[(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}]\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{axy})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{bxy})\boldsymbol{a},$$

illetve

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{xuv})\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{yuv})\boldsymbol{x},$$

majd mindkét oldalt szorozzuk skalárisan

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\text{-vel, illetve } (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\text{-vel.}$$

33. *a)*
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{abc})\\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{c}(\boldsymbol{abc})\\ (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{abc}).\end{aligned}$$

Az igazolandó azonosság a fenti azonosságok következménye.

b) Felhasználva az *a)* alatti eredményt

$$\mathbf{mnp} = [(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})]^4;$$

azonban

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})] = (\mathbf{a}+\mathbf{b})[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})] =$$
$$= \mathbf{abc}+\mathbf{bbc}+\mathbf{aba}+\mathbf{bba}+\mathbf{aca}+\mathbf{bca} = 2\mathbf{abc},$$

tehát valóban

$$\mathbf{mnp} = (2\mathbf{abc}^4) = 16(\mathbf{abc})^4.$$

34. Az első két tag

$$(\mathbf{ab})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{ac})(\mathbf{d}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) - (\mathbf{ac})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) =$$
$$= [(\mathbf{ab})\mathbf{c} - (\mathbf{ac})\mathbf{b}]\times\mathbf{d} = [(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}]\times\mathbf{d} =$$
$$= (\mathbf{dbc})\mathbf{a} - (\mathbf{da})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{bcd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

E kifejtés alapján a bizonyítandó azonosság közvetlenül belátható.

35. A számítást a következő lépésekben végezhetjük:

a) $(\mathbf{abc})\mathbf{x} = (\mathbf{xbc})\mathbf{a} + (\mathbf{axc})\mathbf{b} + (\mathbf{abx})\mathbf{c}$.

Erről meggyőződhetünk, ha az

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \times \gamma\mathbf{c}$$

egyenlőséget megszorozzuk skalárisan rendre $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$-vel és α, β, γ nyert értékeit behelyettesítjük.

b) $(\mathbf{abc})(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = [(\mathbf{x}\times\mathbf{y})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{a} + [(\mathbf{x}\times\mathbf{y})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]\mathbf{b} + [(\mathbf{x}\times\mathbf{y})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\mathbf{c} =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{xb} & \mathbf{xc} \\ \mathbf{yb} & \mathbf{yc} \end{vmatrix}\mathbf{a} + \begin{vmatrix} \mathbf{xc} & \mathbf{xa} \\ \mathbf{yc} & \mathbf{ya} \end{vmatrix}\mathbf{b} + \begin{vmatrix} \mathbf{xa} & \mathbf{xb} \\ \mathbf{ya} & \mathbf{yb} \end{vmatrix}\mathbf{c}.$$

(Lásd a négyes vektorszorzatokat a bevezetésben!)

c) A *b)* alatti egyenlőség mindkét oldalát szorozva skalárisan $\mathbf{z}$-vel:

$$(\mathbf{abc})(\mathbf{xyz}) = \begin{vmatrix} \mathbf{xb} & \mathbf{xc} \\ \mathbf{yb} & \mathbf{yc} \end{vmatrix}\mathbf{az} + \begin{vmatrix} \mathbf{xc} & \mathbf{xa} \\ \mathbf{yc} & \mathbf{ya} \end{vmatrix}\mathbf{bz} + \begin{vmatrix} \mathbf{xa} & \mathbf{xb} \\ \mathbf{ya} & \mathbf{yb} \end{vmatrix}\mathbf{cz} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{xa} & \mathbf{xb} & \mathbf{xc} \\ \mathbf{ya} & \mathbf{yb} & \mathbf{yc} \\ \mathbf{za} & \mathbf{zb} & \mathbf{zc} \end{vmatrix}.$$

36.
$$\mathbf{x} = \mathbf{a}\times(\mathbf{x}+\mathbf{b})$$
$$\mathbf{x} + (\mathbf{x}\times\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} + [\mathbf{a}\times(\mathbf{x}+\mathbf{b})]\times\mathbf{a} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{a}^2\mathbf{x} + \mathbf{a}^2\mathbf{b} - (\mathbf{ax})\mathbf{a} - (\mathbf{ab})\mathbf{a} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Az eredeti egyenletből $\mathbf{ax} = 0$, tehát

$$(1+\mathbf{a}^2)\mathbf{x} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{ab})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2\mathbf{b} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + [\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})].$$

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + [\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]}{1+\mathbf{a}^2}.$$

δ) Analitikus geometriai feladatok síkban

37. Kell, hogy a kör középpontja az egyenestől a távolságra legyen, tehát a keresett feltétel:

$$(\boldsymbol{c}\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{p}_0)^2 = a^2.$$

(Tudvalevő, hogy ha az egyenes normálegyenletébe egy tetszőleges pont helyzetvektorát helyettesítjük, a pontnak az egyenestől való távolságát kapjuk meg.)

38. $$\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a}_0'\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0') + \boldsymbol{a}_0'(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0') + (\boldsymbol{a}_0'+\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}_0 =$$
$$= \boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0') - \boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0') = 0.$$

39. Az egyenesnek az A ponton kívül át kell menni BC távolság felezőpontján: $F\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)\right]$-on is. Az egyenes tetszőleges pontjának helyzetvektóra, így az egyenes egyenlete:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\overline{AF} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{r}_1\right]$$

vagy

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 - 2\boldsymbol{r}_1)$$

(λ, illetve t tetszőleges paraméterek).

40. A magassági vonalak egyenletei:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) = 0$$
$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0$$
$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0.$$

Az első két egyenletet összeadva

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_2 - \underline{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2} - \underline{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_3} + \underline{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3} + \underline{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_3} - \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1 + \underline{\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_1} = 0.$$

Összevonás és kiemelés után (az aláhúzott tagok kiesnek!) a harmadik egyenletet kapjuk. Ez azt bizonyítja, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

41. Az oldalfelező merőlegesek egyenletei

$$\left[\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)\right](\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) = 0$$

$$\left[\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_1)\right](\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0$$

$$\left[\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)\right](\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0.$$

Az első két egyenletet összeadva, a műveletek elvégzése, összevonás és kiemelés után a harmadik egyenletet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

42. A feltétel szerint

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2) = C$$

$$\boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = C.$$

A bal oldal átalakításával

$$\left[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\right]^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = C,$$

illetve

$$\left[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\right]^2 = C + \frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2.$$

Innen látható, hogy a keresett mértani hely kör, melynek sugara

$$\varrho = \sqrt{c + \frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2},$$

középpontja pedig az AB szakasz felezőpontja.

43. A 104. ábra alapján könnyen belátható, hogy a $P(\mathbf{r}_1)$ középpontú, ϱ sugarú kör egyenlete: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 = \varrho^2$.

A kitűzött feladatban adott egyenlet mindkét oldalához hozzáadva

$$\frac{1}{4}\mathbf{m}^2\text{-et},$$

lesz

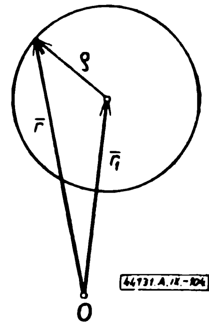
$$\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{m}}{2}\right)^2 = c + \frac{\mathbf{m}^2}{4}.$$

Így látható, hogy ez olyan kör egyenlete, melynek sugara

$$\varrho = \sqrt{c + \frac{\mathbf{m}^2}{4}},$$

középpontjának helyzetvektora pedig

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{m}}{2}.$$



104. ábra

44. Ha a kör egy tetszőleges pontja $P(\mathbf{r})$, akkor $AP \perp BP$, tehát

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0.$$

Más mód: a kör C középpontjának helyzetvektora

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2),$$

sugara pedig

$$\frac{1}{2}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|,$$

tehát a kör egyenlete:

$$\left[\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right]^2.$$

(Ez az egyenlet rendezés után természetesen a fentibe megy át.)

ε) Analitikus geometriai feladatok térben

45. Ha P a merőleges keresett talppontja, akkor ennek helyzetvektora nyilván

$$\boldsymbol{r}_P = \alpha \boldsymbol{n}_0 + \beta \boldsymbol{n}_0.$$

Ezt az értéket mindkét sík egyenletébe behelyettesítve

$$(\alpha \boldsymbol{n}_0 + \beta \boldsymbol{n}_0')\boldsymbol{n}_0 = p_0 \quad \text{és} \quad (\alpha \boldsymbol{n}_0 + \beta \boldsymbol{n}_0')\boldsymbol{n}_0' = p_0'.$$

Innen

$$\alpha = \frac{p_0 - p_0 \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

és

$$\beta = \frac{p_0 - p_0 \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

ahol

$$\varphi = (\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}_0')_{\sphericalangle}.$$

46. A $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ vektorok a kérdéses síkban fekszenek, következőleg vektoriális szorzatuk a síkra merőleges. Azonban

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) =$$
$$= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$$

és ezzel az állítást igazoltuk.

Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a kezdőpontot a vektorok közös kezdőpontjába helyezve, felírjuk a sík egyenletét: ez egyszerű, mert $\boldsymbol{r}$-rel jelölve a sík tetszőleges pontjának helyzetvektorát, az $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ vektorok komplanárisak, tehát

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = 0.$$

Kifejtve és rendezve

$$\boldsymbol{r}[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})] = \boldsymbol{abc};$$

mivel $\boldsymbol{abc}$ konstans, a kérdéses vektornak merőlegesnek kell lennie a síkra.

47. Legyen a sík tetszőleges pontja $P(\boldsymbol{r})$; a $PABC$ tetraéder térfogata ugyanannyi mint az eredetié, ha tehát az eredeti tetraéder magassága h, akkor

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = \pm h\,|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)|.$$

Ez éppen a keresett sík egyenlete.

48. Legyen egy tetszőleges ilyen pont $P(\boldsymbol{r})$. Ekkor

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)^2 = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2)^2.$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2^2 - \boldsymbol{r}_1^2).$$

Ez pedig olyan sík egyenlete, mely az AB szakaszt merőlegesen felezi; e sík minden pontja eleget tesz a feltételnek.

49. A feltétel szerint

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)^2=\lambda^2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)^2.$$

A műveletek elvégzése után

$$\boldsymbol{r}^2-\frac{2}{1-\lambda^2}(\boldsymbol{r}_1-\lambda^2\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{r}=\frac{\lambda^2\boldsymbol{r}_2^2-\boldsymbol{r}_1^2}{1-\lambda^2},$$

vagy teljes négyzetté kiegészítéssel

$$\left(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{r}_1-\lambda^2\boldsymbol{r}_2}{1-\lambda^2}\right)^2=\varrho^2,$$

ahol

$$\varrho^2=\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)^2.$$

Innen látható, hogy az egyenlet a síkban kört jelent („Apollonius-kör"), melynek a középpontja az AB egyenesen fekszik az $\frac{\boldsymbol{r}_1-\lambda^2\boldsymbol{r}_2}{1-\lambda^2}$ pontban; $\lambda=1$-nél a kör egyenessé fajul el.

Térben az egyenlet gömbfelületet jelent, mely $\lambda=1$-nél síkká fajul el.

50. A felület egyenes körhenger-felület, melynek tengelye a kezdőponton megy át és $\boldsymbol{t}_0$ irányú, sugara ϱ.

Ugyanis

$$\boldsymbol{t}_0\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}_0)$$

olyan vektor, mely $\boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{t}_0$ síkjában fekszik, merőleges $\boldsymbol{t}_0$-ra és abszolút értéke

$$|\boldsymbol{t}_0\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}_0)|=|\boldsymbol{r}|\cdot\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}_0)=\varrho.$$

2. §. Analitikus geometriai feladatok vektoralgebrai megoldása (koordinátákkal)

α) Pont, távolság, szög, terület, térfogat

1. (−4, 5, 10) és (4, 9, 18). 2. $\left(3,3,\frac{1}{3}\right)$.

3. $B(4,-4,5)$, $D(7,4,0)$, $A(12,1,8)$, $B_1(9,7,6)$, $D_1(6,-1,11)$.

4. $AB=\sqrt{11}$ $BC=\sqrt{222}$

$AC=\sqrt{209}$ $BD=\sqrt{149}$

$AD=\sqrt{98}$ $CD=\sqrt{83}$.

5. (−7, 10, −4).

6. *a)* $\sqrt{\frac{162}{7}}$. *b)* $\cos\alpha=\frac{\sqrt{35}}{7}$, $\cos\beta=\frac{2\sqrt{26}}{13}$.

7. $\cos\varphi = \frac{19}{\sqrt{390}}$. 8. $\cos\varphi \frac{14}{\sqrt{550}}$.

9. *a)* igen *b)* nem.

10. *a)* $\sqrt{153{,}5}$ *b)* $\sqrt{4{,}5}$ *c)* 8,55...

11. $m_A = \frac{17}{\sqrt{74}}$; $m_C = \frac{17}{\sqrt{11}}$; $m_B = \frac{17}{\sqrt{6{,}6}}$; $m_D = \frac{17}{\sqrt{114}}$.

12. $V = 1$. 13. $V = 5$. 14. $V = 54$. 15. $V = \frac{146}{3}$.

16. $k = \sqrt{65} + \sqrt{86} + \sqrt{59}$.

17. $\varrho = \frac{2t}{a+b+c} = \frac{\sqrt{5760}}{16} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

18. 1 : 1 : 1. 19. $\sin\varphi = 0{,}7307$. 20. $\sin\varphi = 0{,}0195\sqrt{1845}$.

β) Egyenes egyenletrendszere

1. $\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = -z-5$. 2. $3x + 2y = 11$.

3. $\frac{x-2}{8} = \frac{4-y}{5} = -z-3$. 4. $x = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$.

5. $x = \frac{6}{5} - 2t$

$y = \frac{6}{5}$

$z = t$.

6. $x = c_1 + 24t$

$y = c_2 + 11t$

$z = \frac{3 - 3c_1 + 2c_2}{5} - 10t$,

ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok.

7.

$y = 4 + 3t$	$x = 7 + 3t$	$x = 2 + 7t$	$x = 6 + t$
$v = 3 + t$	$v = 2 - 3t$	$y = 4 - t$	$y = 4 + t$
$z = 1 + 12t$	$z = 5 - 4t$	$z = 6 + 2t$	$z = 4 - 6t$.

8. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{6}$.

9. $\frac{46x - 95}{147} = -\frac{46y + 129}{65} = -\frac{46z + 18}{8}$.

10. $x = t$ $y = 10\sqrt{30} - 7 - 27t$ $z = 3\sqrt{30} - 2 - 11t$.

11. $\frac{1-x}{4} = \frac{y+8}{8} = \frac{2-z}{2}$ és $\frac{x-1}{6} = \frac{y+8}{2} = \frac{2-z}{4}$.

12. $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = -\frac{z}{8}$.

13. $\frac{41x - 50}{2} = \frac{41y + 25}{4} = 25 - 41z$. 14. $\lambda = -\frac{34}{5}$.

15. $x - 2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{3}$.

16. $x = 2 + at, \quad y = -1 + bt, \quad z = 5 + ct,$

ahol a és b tetszőlegesek, c pedig a következő összefüggésnek tesz eleget:

$$5a^2 - 43b^2 + 17c^2 + 64ab + 32bc - 16ca = 0.$$

17. $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{7}$.

18. $x = 3 + 7t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 6t.$

19. $x = 20 + t, \quad y = 9 + 10t, \quad z = 18 - 7t.$

20. $x = t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4.$

γ) Sík egyenlete

1. $13x + 6y - 8z - 72 = 0.$
2. $x + 5y + 9z - 61 = 0.$
3. $10x - 15y + 6z - 23 = 0.$
4. $3x + y - 2z + 21 = 0.$
5. $12x + 10y + z - 46 = 0.$
6. (xy) $5x + 2y - 11 = 0.$
   (yz) $3y + 5z + 1 = 0.$
   (xz) $3x - 2z - 7 = 0.$
7. $23x - 24y + 19z + 47 = 0.$
8. $x + 4y + 4z - 29 = 0.$
9. *a)* $x - 10y - 7z + 35 = 0.$
   b) $x - 2y + z + 3 = 0.$
   c) $x - 10y - 7z - 21 = 0.$
10. $35x - 28y + 20z + 140 = 0.$
11. $2x - 9y - 23z - 7 = 0.$
12. $11x - 10y + 8z - 21 = 0.$
    és $11x - 10y + 8z + 31 = 0.$
13. $\lambda = \frac{1}{2}$.
14. $5x - 2y + z - 6 - 5\sqrt{30} = 0.$
15. Csak egy: $y - z = 0.$
16. $9x - 21y - 13z + k = 0,$ ahol k tetszőleges állandó.
17. $7x + 5y - z - 24 = 0.$
18. $x + 5y - 2z - 16 = 0.$
19. $2x - 3y + z - 8 = 0.$
20. $x - 1 = 0$ és $9x + 2y - 6z + 9 = 0.$

δ) Vegyes összetett példák

1. $d = \sqrt{2}$.

2. $d = \frac{\sqrt{377}}{7}$. 3. $V = \frac{1}{393}$.

4. $v_m\left(\frac{20}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{30}{7}\right)$, $v_p\left(\frac{15}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}\right)$. 5. $d = \frac{17}{2\sqrt{14}}$.

6. a) $M\left(-\frac{77}{13}, \frac{191}{13}, \frac{116}{13}\right)$.

b) $C\left(\frac{103}{26}, -\frac{9}{26}, -\frac{25}{26}\right)$.

c) $O\left(\frac{3a+b-6}{a+b+3}, \frac{8a+7b-3}{a+b+3}, \frac{2b+15}{a+b+3}\right)$,

ahol $a = \sqrt{82}$ és $b = \sqrt{131}$.

7. $v_1(4, 3, 0)$
$v_2(4, 0, 2)$
$v_3(0, 3, 2)$.

8.
$$x = 1 + 5k + t \qquad x = 1 - 5k + t$$
$$y = 7 - 5k - 12t \quad \text{és} \quad y = 7 + 5k - 13t$$
$$z = -9k + 3t \qquad z = 9k + 3t.$$

9.
$$x = 7{,}45 + 3t$$
$$y = 0{,}7 - 4t$$
$$z = -2t$$

10. $v_1(8, 4, -6)$
$v_2(-1, 10, -4)$
$v_3(3, -8, 2)$.

11.
$$\lambda = \frac{a_0\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} + b_0\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ y_1 - y_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}} = -6.$$

12. $d = \frac{23}{2\sqrt{762}}$.

13. Az adott pontok irányvektorait $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$-gyel, a súlypontok irányvektorait $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$-mal jelölve:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)}(-\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4),$$

$$\varrho_1 - \varrho_3 = -\frac{1}{4(1+\lambda)}(-\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4),$$

(vagyis $\varrho_1 - \varrho_2 = -\lambda \varrho_1 - \varrho_3$), ami bizonyítja, hogy a súlypontok egy egyenesen vannak.

Számszerűen:

$$M\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4},\ 4\right)$$

$$N\left(3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}\right)$$

(P_1, P_2, P_3, P_4) súlypontja: $S_1\left(\frac{28}{16},\ -\frac{12}{16},\ \frac{26}{16}\right)$

(P_1, P_3, M, N) súlypontja: $S_2\left(\frac{37}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{51}{16}\right)$

(P_2, P_4, M, N) súlypontja: $S_3\left(\frac{25}{16},\ -\frac{19}{16},\ \frac{31}{16}\right)$

$$\overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{9}{16},\ \frac{21}{16},\ \frac{15}{16}\right)$$

$$\overrightarrow{S_2S_3}\left(-\frac{12}{16},\ -\frac{28}{16},\ -\frac{20}{16}\right).$$

Mivel

$$\overrightarrow{S_2S_3} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{S_1S_2},$$

S_1, S_2, S_3 valóban egy egyenesen vannak.

14. Igen, pl.: $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

15. $P_1(-2, 0, 0)$ és $P_2(-3, 0, 0)$.

16. $P_1\left(1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ és $P_2\left(-\frac{38}{32},\ -\frac{63}{32},\ -\frac{51}{32}\right)$.

17. $d = \sqrt{38}$.

18. $Q_1(3, 1, 5)$ és $Q_2\left(-\frac{1379}{13},\ \frac{1071}{13},\ \frac{221}{13}\right)$.

19. $x = c_1 + t,\quad y = c_2,\quad z = 5 - c_1 + 2c_2 - t,$
ahol c_1 és c_2 tetszőleges.

20. $V = \frac{854}{45}$. 21. Csak egy van: $P\left(\frac{86}{72},\ \frac{173}{72},\ \frac{143}{72}\right)$.

(Ez azért van így, mert a megadott egyenes merőleges az adott síkok egyik szögfelező síkjára.)

22. $x + 2 = \frac{y}{6} = \frac{2 - z}{4}$. 23. $V = \frac{25\sqrt{78}}{6}$.

24. $z = \frac{6 + \sqrt{91}}{5} y$ és $z = \frac{6 - \sqrt{91}}{5} y$. 25. $x + y + z - 3 + \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 0.$

3. §. Néhány mechanikai alkalmazás

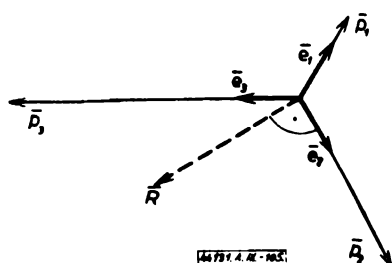
α) Erők összetevése, szétbontása

1. Legyenek a megfelelő egységvektorok rendre

$$e_1, e_2, e_3,$$

azaz

$$p_1 = pe_1, \quad p_2 = 2pe_2, \quad p_3 = 3pe_3.$$



105. ábra

Azt a feltételt, hogy az erők 120°-os szöget zárnak be egymással, nyilván az

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

egyenlet fejezi ki. Ezt felhasználva, az eredő:

$$R = p_1 + p_2 + p_3 = pe_1 + 2pe_2 + 3pe_3 =$$
$$= p(e_1 + e_2 + e_3) + p(e_2 + 2e_3) =$$
$$= p(e_2 + 2e_3).$$

R irányának meghatározása végett szorozzuk meg ezt az egyenletet skalárisan e_2-vel; tekintetbe véve azt, hogy

$$e_2e_3 = \cos(e_2, e_3) = \cos 120° = -\frac{1}{2},$$

nyerjük:

$$Re_2 = p(e_2 + 2e_3)e_2 = p\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0,$$

azaz R merőleges e_2-re és így p_2-re is. R abszolút értéke pedig a következőképpen adódik:

$$R^2 = [p(e_2 + 2e_3)]^2 = p^2(e_2^2 + 4e_2e_3 + 4e_3^2) =$$

$$= p^2\left[1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\right] = 3p^2,$$

azaz

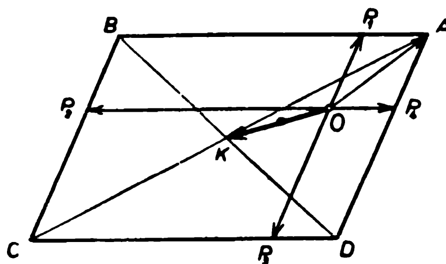
$$|R| = p\sqrt{3}.$$

2. A bizonyítás érdekében fejezzük ki az $\overrightarrow{OK}$ vektort:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK}.$$

Mármost

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_4}$$



106. ábra

és

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}),$$

tehát

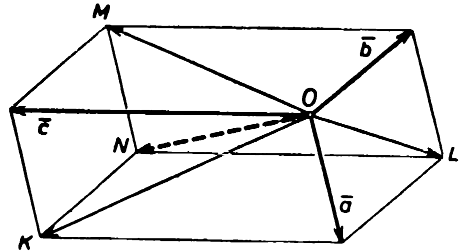
$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_4} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4}).$$

Ebből közvetlenül látható, hogy a négy erő eredője a középpont felé irányul és kétszer akkora abszolút értékű, mint az $\overrightarrow{OK}$ vektor.

3.

$$\overrightarrow{OK} = c + a$$
$$\overrightarrow{OL} = a + b$$
$$\overrightarrow{OM} = b + c$$
$$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} = 2(a + b + c) =$$
$$= 2\overrightarrow{ON},$$

ahol $\overrightarrow{ON}$ az O-ból kiinduló testátlóvektor.



107. ábra

4. Az oldalvektoroknak az ábrán megadott irányítása szerint nyilvánvaló, hogy

$$\begin{array}{ll|l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} & & .1 \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} & & .2 \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} & & .3 \\ \overrightarrow{AE} = \phantom{\overrightarrow{AB} +} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} & & .4 \\ \overrightarrow{AF} = \phantom{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} +} \overrightarrow{CD} & & .5 \end{array}$$

Az egyenlőségeket rendre megszorozva 1, 2, 3, 4, 5-tel, majd összegezve

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{AE} + 5\overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{BC} + 12\overrightarrow{CD} =$$
$$= 6(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{BC} + 6\overrightarrow{CD} =$$
$$= 6\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BC} + 6\overrightarrow{CD} = 12\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BC} + 6\overrightarrow{CD} =$$
$$= 15\overrightarrow{BC} + 6\overrightarrow{CD} = 3(5\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}).$$

Ezzel a keresett vektorösszeget kifejeztük két olyan vektorral ($\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CD}$), melyek 60°-os szöget zárnak be egymással; ezért az eredő vektor abszolút értékének kiszámítása egyszerűen alakul:

$$[3(5\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD})]^2 = 9(25\overrightarrow{BC}^2 + 20\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{CD}^2) =$$
$$= 9(29\,|\overrightarrow{AB}|^2 + 20\,|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot \cos 60°) =$$
$$= 9(29\,|\overrightarrow{AB}|^2 + 20 \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2) =$$
$$= 9(29 + 10\,|\overrightarrow{AB}|^2 = 351\,|\overrightarrow{AB}|^2).$$

Az eredő erő abszolút értéke tehát

$$|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{AE} + 5\overrightarrow{AF}| = 3\,|5\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}| = \sqrt{351}\,|\overrightarrow{AB}|.$$

5. A kör középpontját K-val, a középponttól a húrokra bocsátott merőlegesek talppontjait P-vel és Q-val jelölve, a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}.$$

Ámde

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KP}$$

$$\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KQ}$$

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2(\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KQ}) = -2\overrightarrow{OK}$$

és így

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OK} - 2\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OK},$$

tehát az eredő erő a húrok metszéspontjából annak a kör középpontjára vonatkozó tükörképébe mutat.

6. Legyen a szabályos n-szög köré írható kör középpontja C, a $\boldsymbol{P}_i$ erőnek megfelelő csúcspontja A_i. Ekkor

$$\boldsymbol{P}_i = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_i}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_i}) = n\overrightarrow{OC} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CA_i}.$$

Ámde a szimmetria folytán

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CA_i} = 0,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = n \cdot \overrightarrow{OC},$$

vagyis az eredő erő hatásvonala átmegy a szabályos n-szög középpontján; az eredő nagysága n-szer akkora, mint a támadáspont és a középpont távolsága.

7. Határozzuk meg először a P erő támadáspontjának (D) koordinátáit.

Az $\overrightarrow{OD}$ vektor egységvektora a szimmetria folytán:

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ekkor

$$\overrightarrow{OD} = t \cdot \boldsymbol{e}.$$

$t = |\overrightarrow{OD}|$ meghatározása a következő feltételből következik:

$$\overrightarrow{DC}^2 = l^2,$$

azaz

$$\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - l\right)^2 = l^2.$$

Ebből

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}} l \quad (t > 0).$$

Az $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ vektorok meghatározása végett jelöljük

$\overrightarrow{AD}$ egységvektorát $\boldsymbol{s}_1$-gyel,

$\overrightarrow{BD}$ egységvektorát $\boldsymbol{s}_2$-vel,

$\overrightarrow{CD}$ egységvektorát $\boldsymbol{s}_3$-mal.

Az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$ egyenlőségből

$$l\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{s}_1 = t\boldsymbol{e} = \frac{2}{\sqrt{3}} l\boldsymbol{e}.$$

$$\boldsymbol{s}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{i} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}.$$

Hasonlóképpen

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD}\text{-ből} \qquad \boldsymbol{s}_2 = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

és

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}\text{-ből} \qquad \boldsymbol{s}_3 = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

A rúderők meghatározása végett képeznünk kell P összetevőit $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ és $\boldsymbol{s}_3$ irányokba. Megkeresendők tehát az S_1, S_2, S_3 számok, amelyekkel

$$\boldsymbol{P} = S_1\boldsymbol{s}_1 + S_2\boldsymbol{s}_2 + S_3\boldsymbol{s}_3$$

$$(\boldsymbol{P} = -|\boldsymbol{P}| \cdot \boldsymbol{k} = -P \cdot \boldsymbol{k}).$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet skalárisan $(\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{s}_3)$-mal, ekkor

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3 = S_1 \cdot \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3,$$

innen

$$S_1 = \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3}{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3},$$

$$\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{27}{27} = 1,$$

$$\boldsymbol{P s_2 s_3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -P \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} P.$$

Így tehát

$$S_1 = -\frac{2}{3} P.$$

$(\boldsymbol{s}_3 \times \boldsymbol{s}_1)$-gyel, illetve $(\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2)$-vel szorozva, hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$S_2 = -\frac{2}{3} P,$$

$$S_3 = \frac{1}{3} P.$$

Összefoglalva:

az AD és BD rudak nyomottak, a rúderők nagysága $\frac{2}{3} P$;

az AC rúd húzott, a rúderő nagysága $\frac{1}{3} P$.

8. Ez a feladat az előbbihez hasonló módon oldható meg: megállapítandók $\boldsymbol{P}$-nek a $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ vektorok irányába eső összetevői.

$\overrightarrow{DO}$ egységvektora

$$\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

tehát

$$\overrightarrow{DO} = t \cdot \boldsymbol{e}.$$

A feltételek alapján

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

és

$$|\overrightarrow{DC}| = l,$$

következőleg

$$\left(-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = l^2.$$

Innen

$$t^2 - \frac{2l}{\sqrt{6}} t - \frac{l^2}{2} = 0;$$

a pozitív gyök:

$$t = \frac{3}{\sqrt{6}} l.$$

$\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$ egységvektorait s_1, s_2, s_3-mal jelölve, a

$$\vec{DO} + \vec{OA} = \vec{DA}, \quad \text{azaz} \quad t \cdot e + \frac{l}{\sqrt{2}} i = l s_1$$

$$\vec{DO} + \vec{OB} = \vec{DB}, \quad \text{azaz} \quad t \cdot e + \frac{l}{\sqrt{2}} j = l s_2$$

$$\vec{DO} + \vec{OC} = \vec{DC}, \quad \text{azaz} \quad t \cdot e + \frac{l}{\sqrt{2}} k = l s_3$$

egyenlőségek alapján nyerjük

s_1, s_2, s_3-at:

$$s_1\left(0, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$s_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$s_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0\right).$$

Felbontván a P erőt s_1, s_2, s_3 irányába eső összetevőkre

$$P = S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3$$

$$\left[P = -\frac{P}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right].$$

Az S_1, S_2, S_3 konstansok meghatározására szolgáló egyenletek (l. a 7. feladatot):

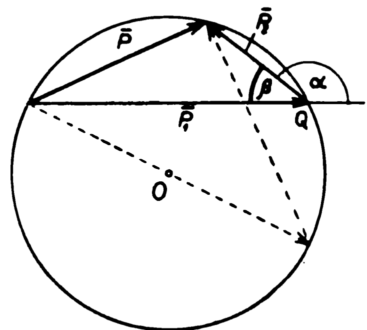
$$S_1 = \frac{P s_2 s_3}{s_1 s_2 s_3} = \frac{P}{\sqrt{6}}$$

és a szimmetria folytán

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{P}{\sqrt{6}}.$$

Így tehát mindhárom rúd nyomott és mindhárom rúderő nagysága: $\frac{P}{\sqrt{6}}$.

9. Adott α esetén P_1 és P_2 illeszkedési pontjából (Q) P állandó $\beta = 180° - \alpha$ szög alatt látszik. Ennek folytán Q csak egy, az adatok alapján egyszerűen megszerkeszthető körön lehet; P_1 nyilván akkor maximális, ha átmegy ennek a körnek a középpontján.



108. ábra

10. Legyen pl.

$$|p_2| = |p_1 + p_2|.$$

Mármost

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2$$

és mivel a feltétel szerint

$$(p_1 + p_2)^2 = p_2^2,$$

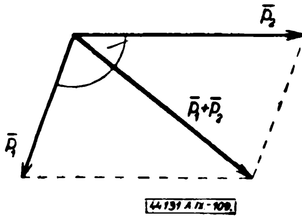
azért

$$p_1 p_2 = -\frac{1}{2} p_1^2 .$$

Mivel egy skalárszorzat csak akkor negatív, ha a vektorok iránya $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb szöget zár be, azaz

$$(p_1, p_2)_{\sphericalangle} > \frac{\pi}{2},$$

az állítást bebizonyítottuk.



109. ábra

11. Legyen a p irányába eső egységvektor e_1, a p' irányába eső pedig e_2. Ekkor

$$p = pe_1 \quad \text{és} \quad p' = 2pe_2,$$

$$pe_1 = 2pe_2 = p + p'.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget skalárisan e_1-gyel:

$$pe_1^2 + 2pe_1 e_2 = (p + p')e_1.$$

Itt most

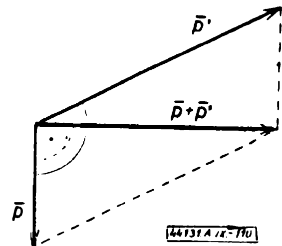
$$e_1^2 = 1 \quad \text{és} \quad (p + p')e_1 = 0,$$

(a merőlegesség folytán)
és így a skalár p-vel is egyszerűsítve

$$1 + 2e_1 e_2 = 0.$$

Ebből

$$e_1 e_2 = \cos (e_1, e_2)_{\sphericalangle} = -\frac{1}{2},$$



110. ábra

azaz

$$(e_1, e_2)_{\sphericalangle} = (p, p')_{\sphericalangle} = \frac{2\pi}{3}.$$

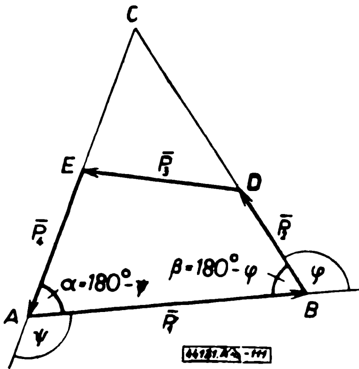
12. A 111. ábra meggyőzhet arról, hogy a feladat geometriai szövegezése a következő: megkeresendő az adott ABC háromszög BC oldalán fekvő D, illetve CA oldalán fekvő E pont, melyekre

$$BD = DE = EA.$$

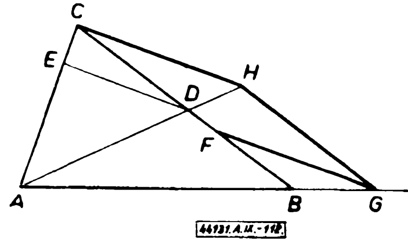
Ez a geometriai feladat egyszerű hasonlósági szerkesztéssel oldható meg, melynek menete a 112. ábráról közvetlenül leolvasható.

$$CF = FG = GH = HC = AC$$

$$ED \| CH.$$



111. ábra



112. ábra

β) Erőrendszer redukciója (eredő erő és nyomaték, centrális tengely, erőcsavar)

13. A $\boldsymbol{P}$ erőnek a t tengelyre vonatkozó nyomatékát a mechanikában a következőképpen értelmezik: vegyük a $\boldsymbol{P}$ erőnek a tengely egy tetszőleges T pontjára vonatkozó nyomatékát, ennek a tengely irányába eső összetevője a tengelyre vonatkozó nyomaték. Az erő forgató hatása olyan, hogy a nyomatékvektorral szembenézve, az óra járásával ellenkező értelmű; a forgató hatás nagyságát a nyomatékvektor abszolút értéke méri.

A tengely T pontjára vonatkozó nyomaték (l. 113. ábra):

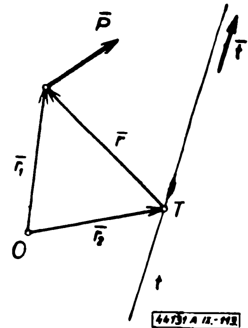
$$\boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{P}.$$

Ennek a tengely irányába eső összetevője tehát a tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\boldsymbol{M}_t = \{[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{P}]\boldsymbol{t}_e\}\,\boldsymbol{t}_e,$$

ahol $\boldsymbol{t}_e = \frac{\boldsymbol{t}}{|\boldsymbol{t}|}$ azaz a tengely egység-irányvektora. Rövidebben:

$$\boldsymbol{M}_t = [(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{P}\boldsymbol{t}_e]\boldsymbol{t}_e.$$



113. ábra

A $\boldsymbol{t}_e$ szorzójaként fellépő vegyes szorzat abszolút értéke adja a nyomatékvektor abszolút értékét:

$$M_t = |\boldsymbol{M}_t| = |(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{P}\boldsymbol{t}_e|;$$

a vegyes szorzat előjele a forgató hatásnak a tengely irányítására vonatkozó értelmét fejezi ki. Ha az előjel pozitív, a forgató hatás — a tengely irányvektorával szembenézve — az óra járásával ellenkező értelmű; negatív előjel esetén a forgató hatás az előbbinek ellentéte.

14. A forgató hatás szempontjából az erőnek csak a tengelyre merőleges síkba eső összetevője jön számításba, a tengellyel párhuzamos erő forgató hatást nem fejt ki; mivel most a forgástengelyek a koordináta-tengelyek, vegyük az erőnek a koordinátasíkokba eső összetevőit és tengelypontnak (pólus) válasszuk az origót.

Az x tengelyre vonatkozó nyomaték abszolút értéke:

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 0 & Y & Z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = yZ - zY.$$

Ugyanis

$\boldsymbol{r}$-nek az yz koordinátasíkba eső összetevője: $y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{P}$-nek az yz koordinátasíkba eső összetevője: $Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$.

Így az x tengelyre vonatkozó nyomatékvektor

$$\boldsymbol{M}_x = (yZ - zY)\boldsymbol{i}.$$

Hasonlóképpen a két másik koordinátatengelyre

$$\boldsymbol{M}_y = (zX - xZ)\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{M}_z = (xY - yX)\boldsymbol{k}.$$

15. Az x tengelyre vonatkozóan mindhárom erő nyomatéka zérus, mert $\boldsymbol{P}_1$ és $\boldsymbol{P}_2$ hatásvonalai metszik a tengelyt, $\boldsymbol{P}_3$-é pedig párhuzamos vele:

$$\boldsymbol{M}_{1x} = \boldsymbol{M}_{2x} = \boldsymbol{M}_{3x} = \boldsymbol{0},$$

következésképpen az egész erőrendszer x tengelyre vonatkozó nyomatéka

$$\boldsymbol{M}_x = \boldsymbol{M}_{1x} + \boldsymbol{M}_{2x} + \boldsymbol{M}_{3x} = \boldsymbol{0}.$$

Az y tengelyre

$$\boldsymbol{M}_{1y} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{M}_{2y} = -3 \cdot 10\boldsymbol{j} = -30\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{M}_{3y} = 5 \cdot (-25)\boldsymbol{j} = -125\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{M}_y = \boldsymbol{M}_{1y} + \boldsymbol{M}_{2y} + \boldsymbol{M}_{3y} = -155\boldsymbol{j}.$$

Végül a z tengelyre

$$\boldsymbol{M}_{1z} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{M}_{2z} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{M}_{3z} = -4 \cdot (-25)\boldsymbol{k} = 100\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{M}_z = \boldsymbol{M}_{1z} + \boldsymbol{M}_{2z} + \boldsymbol{M}_{3z} = 100\boldsymbol{k}.$$

Összefoglalva:

Az x tengelyre vonatkozó nyomaték zérus, forgató hatás erre a tengelyre nézve nincs.

Az y tengelyre vonatkozó nyomaték nagysága 155 mkg, az erőrendszer — a tengely irányába nézve — balra forgat.

A z tengelyre vonatkozó nyomaték nagysága 100 mkg, az erőrendszer — a tengely irányába nézve — jobbra forgat.

16. *a)* Válasszuk a nyomaték pólusául a henger tengelyének $C(6, 5, 0)$ pontját. Az erők támadási pontjainak a pólusra vonatkozó helyzetvektorai ekkor

$$\boldsymbol{r}_1(2, -2, 8),$$
$$\boldsymbol{r}_2(3, 0, 6),$$
$$\boldsymbol{r}_3(-2, 1, 2).$$

Az erők koordinátái az ábra szerint

$$\boldsymbol{P}_1(-2, 1, 2),$$
$$\boldsymbol{P}_2(0, 2, -2),$$
$$\boldsymbol{P}_3(2, 1, 0).$$

Végül a henger tengelyének egységvektora — az irányítást a z koordinátatengelyével egyezően véve —

$$\boldsymbol{t}_e(0, 0, 1).$$

A henger tengelyére vonatkozó nyomaték ekkor

$$\boldsymbol{M}_t = (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{t}_e + \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{t}_e + \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{t}_e)\boldsymbol{t}_e.$$

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{t}_e = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{t}_e = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{t}_e = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Eszerint

$$\boldsymbol{M}_t = 0 \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0},$$

a nyomaték zérus, a tengely körül forgató hatás nincs.

b) Válasszuk most a nyomaték pólusául a henger $S(6, 5, 4)$ súlypontját.

Ekkor

$$\boldsymbol{r}_1(\ 2,\ -2,\ 4),$$
$$\boldsymbol{r}_2(\ 3,\ 0,\ 2),$$
$$\boldsymbol{r}_3(-2,\ 1,\ -2),$$
$$\boldsymbol{t}_e(\ 1,\ 0,\ 0).$$

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{t}_e = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{t}_e = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{t}_e = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Tehát

$$\boldsymbol{M}_t = (-8 - 4 + 2)\boldsymbol{i} = -10\boldsymbol{i}.$$

A nyomaték nagysága

1 mkp

(mert egy koordinátaegység 0,1 m-t jelentett!); az erőrendszer — a tengely irányába tekintve — balra forgat.

17. A reakcióerők párhuzamosak és $\boldsymbol{P}$-vel ellenkező irányúak, továbbá abszolút értékükre nézve

$$R_A + R_B + R_C = P;$$

mivel pedig a szimmetria folytán

$$R_A = R_B,$$

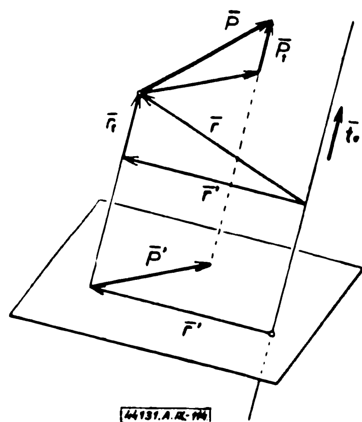
nyilván elégséges R_C kiszámítása.

R_C kiszámítása azon tény alapján történik, hogy $\boldsymbol{P}$-nek és R_C-nek az AB tengelyre vonatkozó nyomatékai abszolút értékben megegyeznek. Ugyanis nyugalom esetén az erőrendszer eredő nyomatéka zérus; $\boldsymbol{R}_A$ és $\boldsymbol{R}_B$ az AB tengelyre nem adnak nyomatékot, mert hatásvonaluk metszi a tengelyt.

A számítás végrehajtását lényegesen egyszerűsíti, ha a tengelyre vonatkozó nyomaték abszolút értékének

$$M_t = |\boldsymbol{r}\boldsymbol{P}\boldsymbol{t}_e|$$

képletét kissé átalakítjuk ($\boldsymbol{r}$ a tengely tetszőleges pontjából a $\boldsymbol{P}$ erő hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató vektor; $\boldsymbol{t}_e$ a tengely irányát meghatározó egységvektor).



114. ábra

Bontsuk fel ugyanis $\boldsymbol{r}$-et és $\boldsymbol{P}$-t a tengely irányába eső, illetve a tengelyre merőleges síkban fekvő összetevőkre (l. 114. ábra).

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{P}_t$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_t$$

$$\boldsymbol{P}_t || \boldsymbol{r}_t || \boldsymbol{t}_e$$

$$(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{P}') || \boldsymbol{t}_e.$$

Ekkor

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{P}\boldsymbol{t}_e = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{t}_e) = (\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_t)[(\boldsymbol{P}' + \boldsymbol{P}_t)\times\boldsymbol{t}_e] =$$
$$= (\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_t)[(\boldsymbol{P}'\times\boldsymbol{t}_e) + \underbrace{(\boldsymbol{P}_t\times\boldsymbol{t}_e)}_{=0}] =$$
$$= \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{P}'\times\boldsymbol{t}_e) + \underbrace{\boldsymbol{r}_t(\boldsymbol{P}'\times\boldsymbol{t}_e)}_{=0} =$$
$$= (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{P}')\boldsymbol{t}_e = \pm|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{P}'|.$$

Következésképpen

$$M_t = |\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{P}'|,$$

azaz a tengelyre vonatkozó nyomaték ugyanakkora, mint az erő egy — a tengelyre merőleges — síkba eső vetületének a sík és tengely döféspontjára vonatkozó nyomatéka.

Példánkra alkalmazva, a $\boldsymbol{P}$ erő AB tengelyre vonatkozó nyomatékának nagysága: $P \cdot ED$, az $\boldsymbol{R}_C$ reakcióerő nyomatékának nagysága pedig: $R_C \cdot EC$ (ugyanis mind $\boldsymbol{P}$, mind $\boldsymbol{R}_C$ az AB-re E-ben emelt merőleges síkba esnek, továbbá

$$\boldsymbol{P} || \boldsymbol{R}_C \perp EC).$$

Így

$$R_C \cdot EC = P \cdot ED,$$

$$R_C = \frac{ED}{EC} \cdot P.$$

Számszerűen:

$$EC = \sqrt{1{,}4^2 - 0{,}6^2} = 1{,}265 \text{ m}$$

$$ED = 1{,}265 - 0{,}4 = 0{,}865 \text{ m}$$

$$R_C = \frac{0{,}865}{1{,}265} \cdot 10 \text{ kg} = 6{,}84 \text{ kg}.$$

Ennek megfelelően

$$R_A = R_B = \frac{P - R_C}{2} = 1{,}58 \text{ kg}.$$

18. Képezzük az erőrendszer nyomatékát az AB tengelyre; feltétele az egyensúlynak, hogy ez a nyomaték zérus legyen. Mivel az $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_5$ és $\boldsymbol{S}_6$ erők metszik az AB tengelyt, ezek nyomatéka zérus; ugyancsak zérus az ABC lap síkjában ható erőpár nyomatéka az AB tengelyre (mert az erőpár síkjának normálisa merőleges a tengelyre). Így csak az $\boldsymbol{S}_3$ és $\boldsymbol{S}_4$ erők veendők számításba; ezeknek az AB tengelyre való nyomatéka csak akkor lehet zérus, ha eredőjük a tengellyel párhuzamos. Mivel pedig $\boldsymbol{S}_3$ és $\boldsymbol{S}_4$-nek vetülete az ABC lapra egyenlő és egyirányú, következik, hogy

$$|\boldsymbol{S}_3| = |\boldsymbol{S}_4|$$

és a C csukló egyik rúdja húzott, a másik nyomott (l. 92. ábra).

Hasonlóképpen felírva az erőrendszer nyomatékát a BC, illetve CA tengelyekre, nyerjük, hogy

$$|\boldsymbol{S}_1| = |\boldsymbol{S}_2|$$

és

$$|\boldsymbol{S}_5| = |\boldsymbol{S}_6|.$$

Az egyensúly feltételéből azonban az is következik, hogy az erőrendszer eredő erejének is zérusnak kell lennie. Az A csuklóban támadó $\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, a B-ben támadó $\boldsymbol{S}_5 + \boldsymbol{S}_6$ és a C-ben támadó $\boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4$ eredők az előbbiek szerint egysíkúak és hatásvonalaik egyenlőszárú háromszöget (DEF) alkotnak. A külső erők (erőpár) eredője zérus lévén, a fentiek szerint kell, hogy az

$$\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2, \quad \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4, \quad \boldsymbol{S}_5 + \boldsymbol{S}_6$$

erők háromszöge záródjék, tehát

$$|\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2| = |\boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4| = |\boldsymbol{S}_5 + \boldsymbol{S}_6|.$$

De ekkor egyúttal

$$|\boldsymbol{S}_1| = |\boldsymbol{S}_2| = |\boldsymbol{S}_3| = |\boldsymbol{S}_4| = |\boldsymbol{S}_5| = |\boldsymbol{S}_6| = S,$$

azaz az összes rúderők egyenlő nagyok (aminek egyébként a teljes szimmetriából is következnie kellett).

Írjuk fel most már az összes erők nyomatékát az ABC lap O súlypontjára: nyilván ennek is zérusnak kell lennie.

$$\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 \| BC \perp OA$$

$$\boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4 \| AB \perp OC$$

$$\boldsymbol{S}_5 + \boldsymbol{S}_6 \| CA \perp OB.$$

A rúderők nyomatéka (abszolút értékben)

$$|\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2| \cdot OA + |\boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4| \cdot OC + |\boldsymbol{S}_5 + \boldsymbol{S}_6| \cdot OB = \frac{a^2S\sqrt{3}}{r},$$

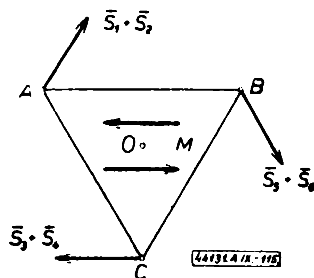
mert

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r},$$

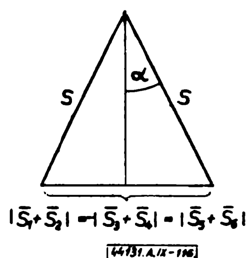
$$|\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2| = |\boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4| = |\boldsymbol{S}_5 + \boldsymbol{S}_6| = 2S\sin\alpha = \frac{aS}{r}$$

és

$$OA = OB = OC = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



115. ábra



116. ábra

Most már felírhatjuk:

$$\frac{a^2S\sqrt{3}}{r} = M,$$

ahonnan

$$S = \frac{rM\sqrt{3}}{3a^2}.$$

A számadatokat behelyettesítve nyerjük bármelyik rúderő nagyságát:

$$S = \frac{1{,}2\cdot 10\cdot\sqrt{3}}{3}\text{ kp} = 4\sqrt{3}\text{ kp} = 6{,}93\text{ kp}.$$

(Megjegyzés: nyomatéki pólusnak bármilyen pontot vehettünk volna; azért vettük fel O-ban, az ABC lap súlypontjában, mert a számítás egyszerűsítése érdekében célszerű a szimmetriát kihasználni.)

19. A számítás gondolatmenete a következő: kiszámítjuk az A, B, C csuklókban keletkező reakcióerőket, majd megállapítjuk ezek rúdirányú összetevőit.

Az $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{R}_C$ reakcióerőknek külön számítjuk ki a függélyes összetevőit ($\boldsymbol{R}_{Av}$, $\boldsymbol{R}_{Bv}$, $\boldsymbol{R}_{Cv}$) és külön a vízszintes összetevőit ($\boldsymbol{R}_{Ah}$, $\boldsymbol{R}_{Bh}$, $\boldsymbol{R}_{Ch}$), majd ezeket összeadjuk. Nyilván

$$\boldsymbol{R}_{Av} + \boldsymbol{R}_{Bv} + \boldsymbol{R}_{Cv} = \boldsymbol{P}_v$$

$$\boldsymbol{R}_{Ah} + \boldsymbol{R}_{Bh} + \boldsymbol{R}_{Ch} = \boldsymbol{P}_h,$$

ahol $\boldsymbol{P}_v$ és $\boldsymbol{P}_h$ a $\boldsymbol{P}$ erő függélyes, illetve vízszintes összetevői.

Egyszerű geometriai megfontolás alapján

$$P_v = P \cdot \sin \alpha = 10 \text{ kp},$$
$$P_h = P \cdot \cos \alpha = 10\sqrt{3} \text{ kp} = 17{,}32 \text{ kp},$$
$$d = \frac{a\sqrt{3}}{2} - (d_1 + d_2) = 0{,}566 \text{ m}.$$

A reakcióerők függőleges összetevőinek meghatározására a 17. példában már bemutatott módszer szerint járunk el, vagyis képezzük az erőrendszer nyomatékát a *BC, CA, AB* tengelyekre és így a következő egyenlőségeket nyerjük:

$$R_{Av} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = P_v d_1; \qquad R_{Av} = \frac{2P_v}{a\sqrt{3}} d_1 = 1{,}15 \text{ kp},$$
$$R_{Bv} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = P_v d_3; \qquad R_{Bv} = \frac{2P_v}{a\sqrt{3}} d_3 = 6{,}54 \text{ kp},$$
$$R_{Cv} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = P_v d_2; \qquad R_{Cv} = \frac{2P_v}{a\sqrt{3}} d_2 = 2{,}31 \text{ kp}.$$

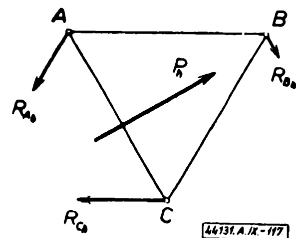
A reakcióerők vízszintes összetevőit a 18. feladatban alkalmazott eljárás szerint kereshetjük meg. Kiszámítván ugyanis az erőrendszer nyomatékát a *D, E, F* pontokra, rendre a következő egyenlőségekre jutunk:

$$R_{Ah} \cdot a\sqrt{3} = P_h \cdot \frac{3d_1 + d_2 + 2d_3}{\sqrt{3}},$$
$$R_{Bh} \cdot a\sqrt{3} = P_h \cdot \frac{d_2 - d_1}{\sqrt{3}},$$
$$R_{Ch} \cdot a\sqrt{3} = P_h \cdot \frac{d_1 + 3d_2 + 2d_3}{\sqrt{3}}.$$

(**P_h „karjainak" azaz a *D, E, F* pontok és a hatásvonal távolságának kiszámítása egyszerű trigonometriai feladat; mindenesetre egyszerűsíti a számítást, hogy a hatásvonal merőleges a *DEF* háromszög *DF* oldalára.)**

Innen

$$R_{Ah} = \frac{3d_1 + d_2 + 2d_3}{3a} P_h = 9{,}42 \text{ kp},$$
$$R_{Bh} = \frac{d_2 - d_1}{3a} P_h = 0{,}58 \text{ kp},$$
$$R_{Ch} = \frac{d_1 + 3d_2 + 2d_3}{3a} P_h = 10{,}58 \text{ kp}.$$



117. ábra

Ezek az összetevők az 1 és 2, 3 és 4, 5 és 6 jelzésű rudak síkjában (és természetesen az *ABC* lap vízszintes síkjában is) feküsznek. Irányításukat P_h-val ellentétes forgató hatásuknak megfelelően a 117. ábra szemlélteti.

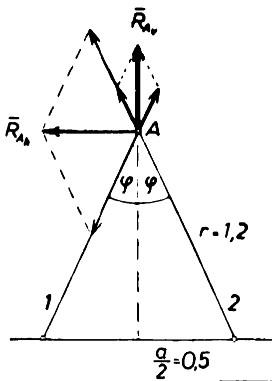
(Megjegyzés: könnyű lenne annak igazolása, hogy $\boldsymbol{R}_{Ah}$, $\boldsymbol{R}_{Bh}$, $\boldsymbol{R}_{Ch}$ és $\boldsymbol{P}_h$ zárt vektorpoligont alkotnak.)

Most már kiszámíthatjuk a rúderőket. Például az 1-es rúdban keletkező erő nagysága

$$R_1 = \frac{R_{Ah}}{2\sin\varphi} - \frac{R_{Av}}{2\cos\varphi} = 1{,}2R_{Ah} - \frac{6}{\sqrt{119}}R_{Av} = 10{,}67 \text{ kp}.$$

A 2-es rúdban keletkező erő nagysága

$$R_2 = \frac{R_{Ah}}{2\sin\varphi} + \frac{R_{Av}}{2\cos\varphi} = 11{,}94 \text{ kp}.$$



118. ábra

A $\boldsymbol{P}$ erő az 1-es rudat húzza, a 2-es rudat nyomatja. Hasonló számítással

$$R_3 = \frac{R_{Bv}}{2\cos\varphi} + \frac{R_{Bh}}{2\sin\varphi} = 4{,}29 \text{ kp},$$

$$R_4 = \frac{R_{Bv}}{2\cos\varphi} - \frac{R_{Bh}}{2\sin\varphi} = 2{,}90 \text{ kp}.$$

A $\boldsymbol{P}$ erő mind a 3-as, mind a 4-es rudat nyomja. Végül

$$R_5 = \frac{R_{Ch}}{2\sin\varphi} + \frac{R_{Ch}}{2\cos\varphi} = 13{,}97 \text{ kp},$$

$$R_6 = \frac{R_{Ch}}{2\sin\varphi} - \frac{R_{Cv}}{2\cos\varphi} = 11{,}43 \text{ kp}.$$

A $\boldsymbol{P}$ erő az 5-ös rudat nyomja, a 6-ost húzza.

Végezetül ellenőrizzük, hogy az A, B, C csuklókban keletkező teljes $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{R}_C$ reakcióerők eredője ellensúlyozza-e a $\boldsymbol{P}$ erőt. Evégből írjuk fel ezeknek az eredőknek a koordinátáit alkalmasan választott koordinátarendszerben (l. 119. ábra).

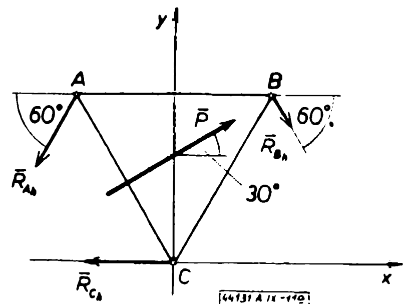
Az ábrán feltüntetett koordinátarendszerben (a z tengely a rajz síkjára merőlegesen felfelé mutat) az erők koordinátái:

$$\boldsymbol{R}_A\left(-\frac{1}{2}R_{Ah},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{Ah}, R_{Av}\right),$$

$$\boldsymbol{R}_B\left(\frac{1}{2}R_{Bh},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{Bh}, R_{Bv}\right),$$

$$\boldsymbol{R}_C\,(-R_{Ch},\ 0,\ R_{Cv}),$$

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P_h,\ \frac{1}{2}P_h,\ -P_v\right).$$



119. ábra

Egyszerű vektorösszeadással igazolható, hogy

$$\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{R}_C = -\boldsymbol{P}.$$

20. A megoldás menete az, hogy az egyes rúderőket lépésről lépésre számítjuk ki oly módon, hogy alkalmasan választott tengelyekre megállapítjuk a nyomatékok abszolút értékeit; ebből kiadódnak sorra a rúderők abszolút értékei. A nyomaték nagyságának kiszámításánál egyszerűen úgy járunk el, hogy egy, a tengelyre merőleges síkra vetítjük az erőket, és a vetületek nyomatékát számítjuk a tengely és a sík döféspontjára (l. 17. feladat).

Válasszuk nyomatéki tengelynek először az $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$, $\boldsymbol{R}_6$ rúderők síkjának az $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ rúderők síkjával való metszésvonalát; erre a tengelyre csak $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{R}_1$ adnak nyomatékot. Ebből (az elemi geometriai számítások közlését mellőzzük):

$$\sqrt{28{,}8}R_1 = 7P_1,$$

$$R_1 = \frac{21\,000}{\sqrt{28{,}8}} = 1750\sqrt{5}\ \text{kp}.$$

$\boldsymbol{R}_1$ irányítását (melyet a 94. ábrán nyíl mutat) abból a tényből állapíthatjuk meg, hogy $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{R}_1$ forgató hatásának egyező értelműnek kell lenni.

A következő nyomatéki tengely legyen az A ponton és az $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_6$ metszéspontján átmenő egyenes; erre csak $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{R}_5$ ad nyomatékot. Ebből

$$\sqrt{3{,}6}\,R_5 = \frac{1}{\sqrt{10}}P,$$

$$R_5 = 500\ \text{kp}.$$

$\boldsymbol{R}_5$ irányítása (ugyanabból a feltételből, mint $\boldsymbol{R}_1$-é): függőlegesen lefelé.

Harmadik nyomatéki tengely legyen az A ponton átmenő függélyes egyenes, mert erre csak $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{R}_6$ ad nyomatékot. Így kiadódik $\boldsymbol{R}_6$

$$\frac{6}{\sqrt{13}}R_6 = P,$$

$$R_6 = 500\sqrt{13}\ \text{kp},$$

$\boldsymbol{R}_6$ is lefelé irányul.

A 2-es és 4-es rudak talppontján átmenő tengelyre a már ismeretes $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_5$ és $\boldsymbol{R}_6$, valamint $\boldsymbol{R}_3$ ad nyomatékot.

E nyomatékok összege zérus, a nyert összefüggés $\boldsymbol{R}_3$ kiszámítására szolgálhat; ügyelni kell azonban a forgató hatások értelmére és a megfelelő helyen mínusz előjelet alkalmazni. Lesz:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\overset{\curvearrowright}{R_1} + 2\overset{\curvearrowleft}{R_5} + \frac{6}{\sqrt{13}}\overset{\curvearrowleft}{R_6} \pm \frac{12}{7}R_3 = 0.$$

A nyilak a forgató hatás értelmét jelzik (a tengely irányába nézve); $\boldsymbol{R}_3$ forgató hatásának és nagyságának olyannak kell lenni, hogy ez az egyenlőség teljesüljön. Tekintetbe véve R_1, R_5 és R_6 értékeit és azt, hogy R_2 pozitív szám, a

$$-3500+1000+3000-\frac{12}{7}R_3=0$$

egyenlőségnek kell teljesülni, azaz R_3 forgató hatása ugyanaz, mint R_1-é ($\overset{\curvearrowright}{R_3}$). Innen

$$R_3=\frac{875}{3}\text{ kp},$$

$\boldsymbol{R}_3$ felfelé irányul.

A 4-es rudat választva tengelyül, melyre $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ és $\boldsymbol{R}_3$ adnak nyomatékot, fentiekhez hasonlóan nyerjük

$$R_2=\frac{9625}{3}\text{ kp},$$

$\boldsymbol{R}_2$ lefelé irányul.

Végül a 6-os és 3-as rudak talppontjain átmenő tengelyre számítva a nyomatékot ($\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_4$), adódik

$$R_4=1000\text{ kp},$$

$\boldsymbol{R}_4$ felfelé irányul.

Az erők abszolút értékeinek ismeretében felírhatjuk koordinátáikat. A 94. ábrán feltüntetett koordinátarendszerben az erővektorok:

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{R}_1(1750, & 0, & 3500), \\
\boldsymbol{R}_2\left(1375,\right. & -\dfrac{2750}{3}, & \left.-2750\right), \\
\boldsymbol{R}_3\left(-125,\right. & -\dfrac{250}{3}, & \left.250\right), \\
\boldsymbol{R}_4(\ 0, & 0 & 1000), \\
\boldsymbol{R}_5(\ 0, & 0, & -500), \\
\boldsymbol{R}_6(\ 0, & 1000, & -1500), \\
\boldsymbol{P}(3000, & 0, & 0).
\end{array}$$

Egyszerű számítás meggyőzhet arról, hogy

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{R}_3+\boldsymbol{R}_4+\boldsymbol{R}_5+\boldsymbol{R}_6.$$

21. A megoldás menete a 20. feladatban vázolt gondolatmenet szerint történhetik, azaz a rúderőket egyenként, alkalmasan választott tengelyekre számított nyomatékok segítségével állapítjuk meg.

Tekintsük először azt a tengelyt, melyet az $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_3$ rúderők hatásvonalainak az $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$, $\boldsymbol{R}_6$ síkjával való döféspontjai meghatároznak. E tengelyre $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$, $\boldsymbol{R}_6$ és $\boldsymbol{P}$ nyomatékai mind zérusok; az egyensúly következtében kell, hogy $\boldsymbol{R}_2$ nyomatéka is zérus legyen: azaz

$$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{0},$$

a 2-es rúd erőmentes.

A következő tengely legyen $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$, $\boldsymbol{R}_6$ síkjában, legyen merőleges $\boldsymbol{P}$-re és menjen át R_3 hatásvonalán; erre csak $\boldsymbol{P}$-nek és $\boldsymbol{R}_1$-nek van nyomatéka, így

$$r\sqrt{3}R_1 = 2P,$$

$$R_1 = \frac{2P}{r\sqrt{3}} = \frac{2500\sqrt{3}}{3} = 1443{,}4 \text{ kp}.$$

$\boldsymbol{R}_1$ iránya: függőlegesen felfelé.

Minthogy az erők közül csak $\boldsymbol{R}_1$ és $\boldsymbol{R}_3$ függélyes irányú és a többinek nincs függélyes összetevője, az egyensúly következtében

$$R_3 = R_1 = 1443{,}4 \text{ kp}$$

és $\boldsymbol{R}_3$ iránya: függőlegesen lefelé.

$\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$ és $\boldsymbol{R}_6$ meghatározására olyan függőleges tengelyekre kell a nyomatékokat számítani, amelyek e három erő közül kettő hatásvonalainak metszéspontjain mennek át. A számítás a következő egyenletekre vezet:

$$\left(\frac{r}{\sin 45^\circ} + 4r \sin 15^\circ\right) \sin 60^\circ \cdot R_4 = (r + 2r \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ)P,$$

$$\left(\frac{r}{\sin 45^\circ} + 4r \sin 15^\circ\right) \sin 60^\circ \cdot R_5 = (r \sin 30^\circ - 2r \sin 15^\circ \cdot \sin 15^\circ)P,$$

$$\left(\frac{r}{\sin 45^\circ} + 4r \sin 15^\circ\right) \sin 60^\circ \cdot R_6 = (r \sin 30^\circ + 2r \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ)P.$$

Ezekből

$$R_4 = \frac{0{,}5 + \sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1{,}5} + \sqrt{6 - \sqrt{27}}} P = 644 \text{ kp},$$

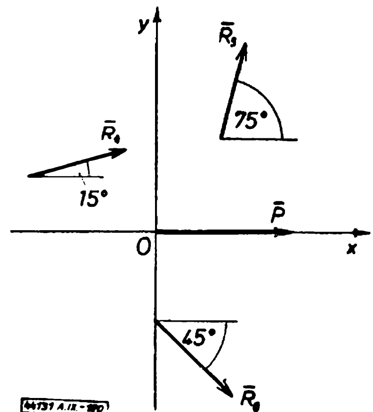
$$R_5 = \frac{\sqrt{0{,}75} - 0{,}5}{\sqrt{1{,}5} + \sqrt{6 - \sqrt{27}}} P = 172{,}6 \text{ kp},$$

$$R_6 = \frac{1}{\sqrt{1{,}5} + \sqrt{6 - \sqrt{27}}} P = 471{,}5 \text{ kp}.$$

$\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$ és $\boldsymbol{R}_6$ irányát a 95. ábrán tüntettük fel.

Az erők koordinátái a 120. ábrán feltüntetett koordinátarendszerben

$\boldsymbol{R}_1(0, \quad 0, \quad R_1)$,
$\boldsymbol{R}_2(0, \quad 0, \quad 0)$,
$\boldsymbol{R}_3(0, \quad 0, \, -R_3)$,
$\boldsymbol{R}_4(R_4 \cos 15^\circ, \quad R_4 \sin 15^\circ, 0)$,
$\boldsymbol{R}_5(R_5 \cos 75^\circ, \quad R_5 \sin 75^\circ, 0)$,
$\boldsymbol{R}_6(R_6 \cos 45^\circ, \quad R_6 \sin 45^\circ, 0)$,
$\boldsymbol{P}(P, \quad 0, \quad 0)$.



120. ábra

Kiszámítva:

$$\begin{array}{lrr} \boldsymbol{R}_1(0, & 0, & 1443{,}4), \\ \boldsymbol{R}_2(0, & 0, & 0), \\ \boldsymbol{R}_3(0, & 0, & -1443{,}4), \\ \boldsymbol{R}_4(622, & 166{,}7, & 0), \\ \boldsymbol{R}_5(44{,}6, & 166{,}7, & 0), \\ \boldsymbol{R}_6(333{,}4, & -333{,}4, & 0), \\ \boldsymbol{P}(1000, & 0, & 0). \end{array}$$

Látható, hogy

$$\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_4 + \boldsymbol{R}_5 + \boldsymbol{R}_6 = \boldsymbol{P}.$$

22. *a)* $X_1 = |\boldsymbol{F}_1| \cdot \cos \alpha_1 = 12 \cdot \cos 45° = 8{,}49,$

$$Y_1 = |\boldsymbol{F}_1| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = |\boldsymbol{F}_1| \sin \alpha_1 = 12 \cdot \sin 45° = 8{,}49.$$

Hasonlóképpen számítva

$$X_2 = 18 \cdot \cos 150° = -15{,}59,$$
$$Y_2 = 18 \cdot \sin 150° = 9$$

és

$$X_3 = 9 \cdot \cos 15° = 8{,}69,$$
$$Y_3 = 9 \cdot \sin 15° = 2{,}33.$$

Következésképpen az eredő $\boldsymbol{R}(X, Y)$ koordinátái

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 1{,}59,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 19{,}82,$$

abszolút értéke

$$|R| = \sqrt{X^2 + Y^2} = 19{,}88,$$

hajlásszöge az x tengelyhez

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{1{,}59}{19{,}88} = 0{,}0799,$$

$$\alpha = 85° \, 25'.$$

b) Az $\boldsymbol{F}_i$ erő nyomatéka a koordinátarendszer kezdőpontjára

$$\boldsymbol{M}_{oi} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

így az eredő nyomaték

$$\boldsymbol{M}_o = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_1) + (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2) + (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_3) =$$
$$= (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\boldsymbol{k} + (x_2 Y_2 - y_2 X_2)\boldsymbol{k} + (x_3 Y_3 - y_3 X_3)\boldsymbol{k} =$$
$$= (2 \cdot 8{,}49 - 1 \cdot 8{,}49)\boldsymbol{k} + [-0{,}5 \cdot 9 - 2 \cdot (-15{,}59)]\boldsymbol{k} +$$
$$+ [3{,}5 \cdot 2{,}33 - (-0{,}9) \cdot 8{,}69]\boldsymbol{k} = 51{,}15\boldsymbol{k}.$$

Látható, hogy az eredő nyomaték vektora a z tengely pozitív irányába mutat és abszolút értéke

$$|\boldsymbol{M}_o| = 51{,}15,$$

továbbá

$$\boldsymbol{M}_o = |\boldsymbol{M}_o|\boldsymbol{k}.$$

c) Mint a mechanikából ismeretes, a centrális tengely azon pontok mértani helye, amelyekre az erőrendszert redukálva, az eredő nyomaték párhuzamos az eredő erővel, azaz az eredő nyomatéknak az eredő erőre merőleges összetevője zérus.

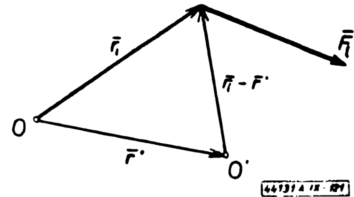
Példánkban — mivel egy síkban ható erőkről van szó — az eredő nyomaték mindig merőleges az eredő erőre, következésképpen az eredő nyomatéknak az eredő erőre merőleges összetevője csak akkor lehet zérus, ha maga az eredő nyomaték is zérus. A kérdés tehát úgy tehető fel, hogy melyek az xy sík azon pontjai, amelyekre nézve az eredő nyomaték zérus.

A mechanika egyszerű összefüggést állapít meg az O pontra vonatkozó $\boldsymbol{M}_0$ és az O' pontra vonatkozó $\boldsymbol{M}_{0'}$ eredő nyomatékok között. Nevezetesen:

$$\boldsymbol{M}_{0'} = \Sigma[(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{F}_i] = \Sigma(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i) - \Sigma(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}_i) = \Sigma(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i) - (\boldsymbol{r}'\times\Sigma\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{M}_0 - (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R}),$$

azaz

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M}_{0'} + (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R}).$$



121. ábra

Legyen most példánkban $\boldsymbol{r}'(x, y)$ a centrális tengely egy tetszőleges pontjának helyzetvektora, akkor az előbbiek szerint

$$\boldsymbol{M}_{0'} = 0$$

és

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R},$$

tehát

$$|\boldsymbol{M}_0|\cdot\boldsymbol{k} = (xY - yX)\cdot\boldsymbol{k}.$$

Innen

$$|\boldsymbol{M}_0| = xY - yX,$$

tehát a centrális tengely egyenlete

$$Yx - Xy - |\boldsymbol{M}_0| = 0.$$

Normálalakba írva:

$$\frac{Yx - Xy - |\boldsymbol{M}_0|}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = 0,$$

azaz

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha - \frac{|\boldsymbol{M}_0|}{|\boldsymbol{R}|} = 0. \quad (\alpha = 85°25')$$

Behelyettesítve

$$0{,}99x - 0{,}08y - 2{,}57 = 0.$$

Ebből a hatásvonal távolsága az origótól

$$p = 2{,}57.$$

23. *a)* Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy kezdőpontja O-ba essék, z tengelye $\boldsymbol{R}$ irányba mutasson, y tengelye pedig az $\boldsymbol{R}$ és $\boldsymbol{M}_0$ által meghatározott síkban legyen (l. 122. ábra).

Ebben az esetben $\boldsymbol{R}$ és $\boldsymbol{M}_0$ koordinátái:

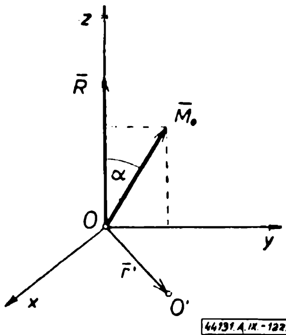
$$\boldsymbol{R}(0,\ 0,\ R)$$

$$\boldsymbol{M}_0(0,\ |\boldsymbol{M}_0|\sin\alpha,\ |\boldsymbol{M}_0|\cos\alpha).$$

Legyen továbbá az xy sík valamely O' pontjának helyzetvektora:

$$\boldsymbol{r}'(x,\ y,\ 0).$$

Ha az erőrendszert az O' pontra redukáljuk, akkor a mechanika tanítása szerint az eredő erő



122. ábra

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R},$$

az eredő nyomaték pedig

$$\boldsymbol{M}_{0'} = \boldsymbol{M}_0 - (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R}).$$

Legyen már most O' az xy síknak a centrális tengellyel való döféspontja. Ekkor, mint a mechanikából ismeretes,

$$\boldsymbol{M}_{0'}||\boldsymbol{R},$$

aminek következtében

$$\boldsymbol{M}_{0'}\times\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{M}_{0'}$ értékét beírva

$$[\boldsymbol{M}_0 - (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R})]\times\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}.$$

Részletesebben:

$$(\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}')\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}.$$

De

$$\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{R} = M_0R\sin\alpha\cdot\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}' = 0,$$
$$\boldsymbol{R}^2 = R^2,$$

tehát a következő vektoregyenletre jutunk:

$$(M_0R\sin\alpha + R^2x)\boldsymbol{i} + R^2y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}.$$

Ebből

$$M_0R\sin\alpha + R^2x = 0,$$
$$R^2y = 0,$$

és így

$$x = -\frac{M_0\sin\alpha}{R} = -\frac{30}{120}\sin 15^\circ = -0{,}065,$$

$$y = 0.$$

De ezzel már a centrális tengely ismeretes, mert — a koordinátarendszer megválasztása folytán — az xy síkra merőleges, így egyenletrendszere:

$$x = -0{,}065,$$
$$y = 0,$$
$$z = t \quad (t = \text{paraméter}).$$

b) Az erőcsavar adatai egyszerűen adódnak:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} = 120\boldsymbol{k} \text{ (az eredő erő mindenütt ugyanaz!).}$$

Mivel pedig a centrális tengelyben $\boldsymbol{M}_{0'}$ egyenlő $\boldsymbol{M}_0$-nak z irányú összetevőjével, azért

$$\boldsymbol{M}_{0'} = \boldsymbol{M}_0\cdot\cos\alpha = 28{,}98\boldsymbol{k}.$$

Keresvén az erőrendszer nyomatékát a centrális tengelyt körülvevő $\varrho = 0{,}8$ sugarú hengerfelületen, helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját O'-be (123. ábra).

Így a hengerfelület valamely P pontjának $\boldsymbol{p}$ helyzetvektora

$$\boldsymbol{p} = (\varrho \cos u)\boldsymbol{i} + (\varrho \sin u)\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$$

(u, v paraméterek).
Most az erőrendszert P-re redukálva nyerjük, hogy

$$\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_{0'} - |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{R}|,$$

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \varrho \cos u & \varrho \sin u & v \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} =$$

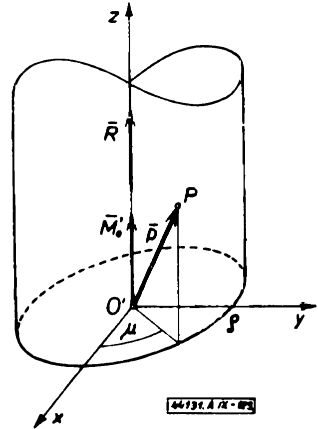
$$= R\varrho \sin u \cdot \boldsymbol{i} - R\varrho \cos u \cdot \boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{M}_P = -R\varrho \sin u \cdot \boldsymbol{i} + R\varrho \cos u \cdot \boldsymbol{j} + M_{0'} \cdot \boldsymbol{k}.$$

Innen a nyomaték nagysága

$$M_P = |\boldsymbol{M}_P| = \sqrt{R^2\varrho^2 + M_{0'}^2} =$$

$$= \sqrt{96^2 + 28{,}98^2} = 100{,}3.$$



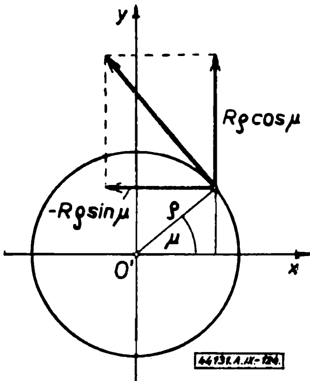
123. ábra

Látható, hogy a nyomaték nagysága a hengerfelület minden pontjában ugyanaz (mert nem függ a hengerfelület paramétereitől). A nyomaték mindig az érintősíkba esik, mert az xy síkra való vetülete a henger alapkörének sugarára mindig merőleges (l. 124. ábra). Végül az alkotóval (egyúttal a z koordinátatengellyel) bezárt φ szögére

$$\cos \varphi = \cos (\boldsymbol{M}_P, \boldsymbol{k}) = \frac{M_{0'}}{M_P} = \frac{28{,}98}{100{,}3},$$

$$\varphi = 73°12'.$$

Ez a szög szintén ugyanaz a hengerfelület minden pontjában.



124. ábra

24. Az eredő erő ($\boldsymbol{P}$) kiszámítása

$$\boldsymbol{P}_1 = 25 \cdot \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + 25 \cdot \frac{4}{5}\boldsymbol{j} = 15\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{P}_2 = 10\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{P}_3 = -25\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 = -10\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}.$$

Az eredő erő nagysága

$$P = |\boldsymbol{P}| = \sqrt{10^2+20^2+10^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} \approx 24{,}5\,\text{kp}.$$

Az eredő erő iránycosinusai

$$\cos \alpha = \frac{-10}{10\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6} = -0{,}4083 \quad (\alpha = 114°6'),$$

$$\cos\beta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = 0{,}8165 \qquad (\beta = 35°15'),$$

$$\cos\gamma = \frac{10}{10\sqrt{6}} = 0{,}4083 \qquad (\gamma = 65°54').$$

Az eredő nyomaték

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_x + \boldsymbol{M}_y + \boldsymbol{M}_z = -155\boldsymbol{j} + 100\boldsymbol{k}.$$

Az eredő nyomaték abszolút értéke

$$M = |\boldsymbol{M}| = \sqrt{155^2 + 100^2} = \sqrt{34025} = 5\sqrt{1361} \approx 184{,}5 \text{ mkp}.$$

Az eredő nyomaték iránycosinusai

$$\cos\lambda = 0 \qquad (\lambda = 90°),$$

$$\cos\mu = -\frac{155}{5\sqrt{1361}} = -0{,}8386 \qquad (\mu = 147°),$$

$$\cos\nu = \frac{100}{5\sqrt{1361}} = 0{,}5420 \qquad (\nu = 57°11').$$

Mivel sem az eredő erő, sem az eredő nyomaték nem zérus és nem is merőlegesek egymásra (ugyanis $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{M} = -2100 \neq 0$), azért az erőrendszer eredője erőcsavar.

A főerőpár értéke (az eredő nyomaték vetülete az eredő erő irányára):

$$M \cdot \cos(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}) = M\frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{PM} = -85{,}8 \text{ mkp}.$$

Állapítsuk meg végül a centrális tengely egyenletrendszerét abból a feltételből, hogy a centrális tengely bármely pontjában az eredő nyomaték párhuzamos az eredő erővel.

Ha $D(x, y, z)$ a centrális tengely egy pontja és $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$-mal jelöljük a D-ből az erők támadáspontjába mutató vektorokat, azaz adataink szerint

$$\boldsymbol{d}_1(\;-x,\;-y,\;-z),$$
$$\boldsymbol{d}_2(3-x,\;-y,\;-z),$$
$$\boldsymbol{d}_3(3-x,\;4-y,\;5-z),$$

akkor a D pontra vonatkozó eredő nyomaték

$$(\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{P}_1) + (\boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{P}_2) + (\boldsymbol{d}_3 \times \boldsymbol{P}_3) \,||\, \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3.$$

A párhuzamosságból következik, hogy a megfelelő vektorkoordináták csak egy konstans szorzóban különbözhetnek. Ezt u-val jelölve, a számítások végrehajtása után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$y - 2z = u,$$
$$x + z - 15{,}5 = 2u,$$
$$-2x - y + 10 = u.$$

Kiküszöbölvén innen u-t, lesz

$$x - 2y + 5z = 15{,}5,$$
$$2x + 2y - 2z = 10.$$

Ez két sík egyenlete, melyeknek metszésvonala a centrális tengely. Helyettesítve a

$$z = 0 \text{ értéket,}$$

nyerjük a centrális tengely döféspontját az xy koordinátasíkkal:

$$x = 8{,}5,\quad y = 3{,}5,\quad z = 0.$$

A centrális tengely irányvektora

$$\boldsymbol{v}(-1,\ 2,\ 1),$$

és így egyenletrendszere:

$$x = 8{,}5 - t,\quad y = 3{,}5 + 2t,\quad z = t.$$

25. A feladat geometriai megfogalmazása végett vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert O kezdőponttal; az x tengely $\boldsymbol{F}_3$, az y tengely $\boldsymbol{F}_1$, a z tengely $\boldsymbol{F}_2$ irányába mutasson. Ekkor az erők koordinátái

$$\boldsymbol{F}_1(0,\ 250,\ 0),\quad \boldsymbol{F}_2(0,\ 0,\ 180),\quad \boldsymbol{F}_3(300,\ 0,\ 0).$$

Továbbá:

az A pont helyzetvektora: $\boldsymbol{r}_A(0;\ 0;\ -0{,}15)$,
a B pont helyzetvektora: $\boldsymbol{r}_B(-0{,}25;\ 0;\ -0{,}15)$,
a C pont helyzetvektora: $\boldsymbol{r}_C(-0{,}25;\ -0{,}35;\ -0{,}15)$.

A tér bármelyik pontjára is redukáljuk az erőrendszert, az eredő erő ugyanaz

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 300\boldsymbol{i} + 250\boldsymbol{j} + 180\boldsymbol{k} = F_3\boldsymbol{i} + F_1\boldsymbol{j} + F_2\boldsymbol{k}.$$

Abszolút értéke:

$$R = |\boldsymbol{R}| = \sqrt{300^2 + 250^2 + 180^2} = 430 \text{ kp}.$$

Az eredő hajlásszögei a koordinátatengelyekhez:

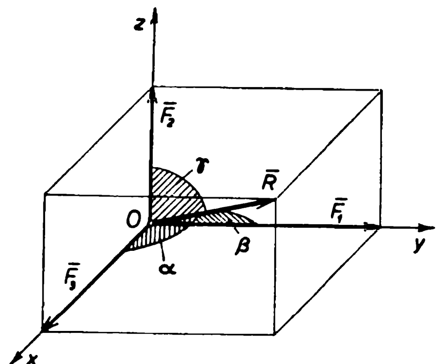
$$\cos\alpha = \frac{F_3}{R} = \frac{300}{430} = 0{,}6977,\quad \alpha = 45°45',$$

$$\cos\beta = \frac{F_1}{R} = \frac{250}{430} = 0{,}5814,\quad \beta = 54°27',$$

$$\cos\gamma = \frac{F_2}{R} = \frac{180}{430} = 0{,}4186,\quad \gamma = 65°15'.$$

Az erőrendszer momentuma az O pontra nyilván zérus, mert mindegyik erő hatásvonala O-n megy át.

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{0}.$$



125. ábra

Az A pontra vonatkoztatott momentum

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_0 - (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_A) = -0{,}15F_1\boldsymbol{i} + 0{,}15F_3\boldsymbol{j} = -37{,}5\boldsymbol{i} + 45\boldsymbol{j}.$$

Abszolút értéke

$$M_A = |\boldsymbol{M}_A| = \sqrt{37{,}5^2 + 45^2} = 58{,}5 \text{ mkp}.$$

$\boldsymbol{M}_A$ merőleges a z koordinátatengelyre, az y tengellyel alkotott hajlásszöge

$$\cos(\boldsymbol{M}_A, \boldsymbol{j}) = \frac{45}{58{,}5}, \quad (\boldsymbol{M}_A, \boldsymbol{j}) = 39°43'.$$

Végül $\boldsymbol{M}_A$ merőleges $\boldsymbol{R}$-nek az xy síkra való vetületére is:

$$\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_3) = 0.$$

Hasonlóképpen

$$\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_B = -37{,}5\boldsymbol{i} + 62{,}5\boldsymbol{k},$$

$$M_B = |\boldsymbol{M}_B| = \sqrt{37{,}5^2 + 62{,}5^2} = 72{,}9 \text{ mkp}.$$

$\boldsymbol{M}_B$ merőleges az y koordinátatengelyre, a z tengellyel alkotott hajlásszöge

$$\cos(\boldsymbol{M}_B, \boldsymbol{k}) = \frac{62{,}5}{72{,}9}, \quad (\boldsymbol{M}_B, \boldsymbol{k}) = 31°.$$

$\boldsymbol{M}_B$ merőleges $\boldsymbol{R}$-nek az xy síkra való vetületére is:

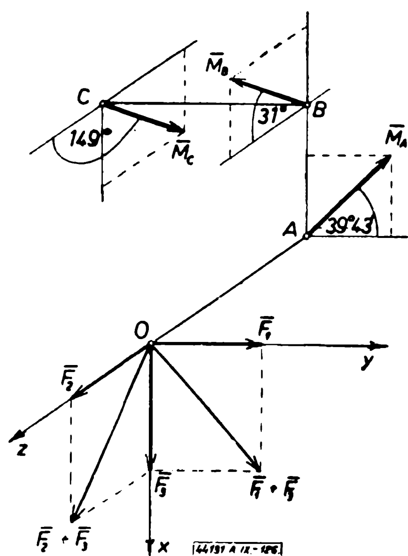
$$\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3) = 0.$$

Végül

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_C = 25{,}5\boldsymbol{i} - 42{,}5\boldsymbol{k},$$

$$M_C = |\boldsymbol{M}_C| = \sqrt{25{,}5^2 + 42{,}5^2} = 49{,}3 \text{ mkp}.$$

$\boldsymbol{M}_C$ merőleges az y koordinátatengelyre, a z tengellyel alkotott hajlásszöge



126. ábra

$$\cos(\boldsymbol{M}_C, \boldsymbol{k}) = \frac{-42{,}5}{49{,}3},$$

$$(\boldsymbol{M}_C, \boldsymbol{k}) = 149°.$$

$\boldsymbol{M}_C$ is merőleges $\boldsymbol{R}$-nek az xy síkra való vetületére is

$$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3) = 0.$$

26. Ha C a normáltranszverzális egy pontja, akkor az erőrendszer nyomatéka C-re (l. 127. ábra):

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}) + k(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{M}.$$

Ha C a centrális tengely egy pontja, akkor teljesülnie kell az

$$\boldsymbol{M} \| \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$$

feltételnek, azaz

$$\boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) = 0$$

kell lennie.

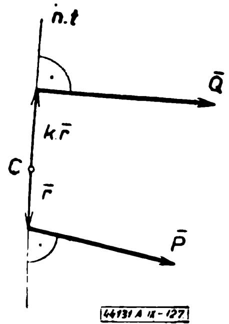
A műveleteket végrehajtva

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})\times(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+k(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{Q})\times(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{Pr})\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{PP})\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{Qr})\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{PQ})\boldsymbol{r}+$$
$$+k[(\boldsymbol{Pr})\boldsymbol{Q}-(\boldsymbol{PQ})\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{Qr})\boldsymbol{Q}-(\boldsymbol{QQ})\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{0}.$$

Mivel $\boldsymbol{Pr}=\boldsymbol{Qr}=0$, rendezve

$$-[(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}]\boldsymbol{r}=k[(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{r}.$$



127. ábra

Az egyenlőség mindkét oldalán ugyanannak az $\boldsymbol{r}$ vektornak bizonyos skalárokkal való szorzata áll, amiből következik, hogy k mindig meghatározható úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön, tehát a centrális tengelynek van a normáltranszverzálissal közös pontja. Tájékozódjunk most afelől, hogy hol van ez a közös pont.

A legutóbbi egyenlőségből következőleg

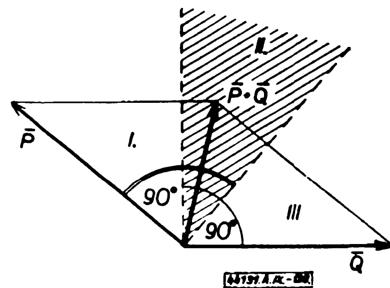
$$k=-\frac{(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}}{(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}}.$$

A közös pont (C) a normáltranszverzálisnak az erők közti szakaszán van, ha

$$k<0,$$

azaz, ha a számláló és nevező egyező előjelűek. Ez mindig bekövetkezik, ha $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ hegyesszöget vagy derékszöget zárnak be; továbbá akkor, ha $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ ugyan tompaszöget zárnak be, de $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ mindkettővel hegyesszöget alkot. A viszonyokat szemléletesen a 128. ábra tünteti fel; $\boldsymbol{P}$-t és $\boldsymbol{Q}$-t egy, a normáltranszverzálisra merőleges síkban ábrázolva, $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ a II-vel jelzett sávba esik.

C a normáltranszverzálisnak mindkét erőtől egyenlő irányban fekvő szakaszán van, ha



128. ábra

1. $(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}>0$ és $(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}<0$,

vagy

2. $(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}<0$ és $(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}>0$.

1. esetben $|(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}|>|(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}|$,

tehát $k>1$ és mivel ekkor egyúttal

$$|\boldsymbol{P}|>|\boldsymbol{Q}|,$$

C a $\boldsymbol{P}$-hez, azaz a nagyobb erőhöz van közelebb. (Ebben az esetben $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ a 128. ábra I.-gyel jelzett sávjába esik.)

2. esetben

$$|(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})|\boldsymbol{P}<|(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}|,$$

tehát

$$0<k<1,$$

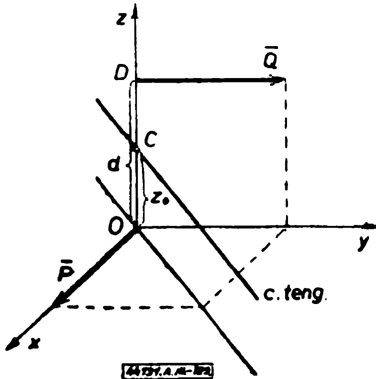
és mivel ekkor egyúttal

$$|\boldsymbol{P}|<|\boldsymbol{Q}|,$$

C a $\boldsymbol{Q}$-hoz, azaz ismét a nagyobb erőhöz van közelebb. (Ebben az esetben $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ a 128. ábra III.-mal jelzett sávjába esik.)

Mind az 1., mind a 2. eset összefoglalható abba a kijelentésbe, hogy ha C mindkét erőtől egyenlő irányba esik, akkor a nagyobbik erőhöz van közelebb. (Ez egyébként akkor is igaz, ha C a két erő közti szakaszon van.)

27. Válasszuk a 129. ábrán feltüntetett koordinátarendszert. Ebben az erővektorok:



129. ábra

$$\boldsymbol{P}(P, \quad 0, \quad 0).$$
$$\boldsymbol{Q}(0, \quad Q, \quad 0).$$

Ebben a koordinátarendszerben a centrális tengely metszi a z tengelyt annak z_0 koordinátájú pontjában; párhuzamos az xy koordinátasíkkal.

Mivel továbbá a centrális tengely párhuzamos $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$-val, egyenletrendszere:

$$x = t,$$
$$y = \frac{Q}{P}\, t, \quad (t = \text{paraméter})$$
$$z = z_0 \quad (|\boldsymbol{P}| = P, \quad |\boldsymbol{Q}| = Q).$$

A feladat most már csak z_0 meghatározása. Ez a

$$(\overrightarrow{CO}\times \boldsymbol{P}) + (\overrightarrow{CD}\times \boldsymbol{Q}) \,||\, (\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})$$

feltételből számítható ki.

$$\overrightarrow{CO}(0, \quad 0, \quad -z_0),$$
$$\overrightarrow{CD}(0, \quad 0, \quad d-z_0),$$
$$\overrightarrow{CO}\times \boldsymbol{P} = -Pz_0 \cdot \boldsymbol{j},$$
$$\overrightarrow{CD}\times \boldsymbol{Q} = Q(z_0-d)\cdot \boldsymbol{i}.$$

Párhuzamos vektorok koordinátái csak egy konstans λ szorzóban különbözhetnek:

$$Q(z_0-d) = \lambda P,$$
$$-Pz_0 = \lambda Q.$$

Az egyenlőségeket osztva

$$\frac{Q(d-z_0)}{Pz_0} = \frac{P}{Q},$$

ahonnan

$$z_0 = \frac{Q^2}{P^2+Q^2}\, d.$$

Megfigyelhetjük, hogy

$$\frac{a-z_0}{z_0} = \frac{P^2}{Q^2} = \text{állandó},$$

vagyis az az arány, amely szerint a centrális tengely az erők távolságát osztja, csak az erők nagyságától függ, távolságuktól nem. Továbbá

$$d - z_0 > z_0, \quad \text{ha} \quad P > Q,$$

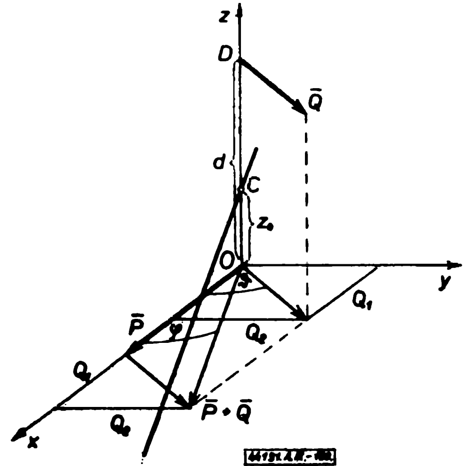
vagyis a centrális tengely a nagyobb erőhöz van közelebb.

28. Válasszuk a 130. ábrán feltüntetett koordinátarendszert, melyben az x tengely $\boldsymbol{P}$ irányába, a z tengely a normáltranszverzális irányába esik. A centrális tengely ebben a rendszerben párhuzamos az xy síkkal, a z tengelyt a z_0 koordinátájú pontban metszi. Egyenletrendszere tehát (mivel párhuzamos $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$-val):

$$x = t,$$

$$y = t \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q_2}{P + Q_1} \cdot t,$$

$$z = z_0.$$



130. ábra

Ugyanis az ábra szerint az erők koordinátái:

$$\boldsymbol{P}(P, \quad 0, \quad 0), \qquad |\boldsymbol{P}| = P,$$

$$\boldsymbol{Q}(Q_1, \quad Q_2, \quad 0), \qquad |\boldsymbol{Q}| = Q,$$

ahol

$$Q_1 = Q \cdot \cos \vartheta,$$

$$Q_2 = Q \cdot \sin \vartheta.$$

Az egyetlen ismeretlen z_0 meghatározására használjuk fel a

$$(\overrightarrow{CO} \times \boldsymbol{P}) + (\overrightarrow{CD} \times \boldsymbol{Q}) \| (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q})$$

feltételt.

$$\overrightarrow{CO}\ (0, \quad 0, \quad -z_0),$$

$$\overrightarrow{CD}\ (0, \quad 0, \quad d - z_0),$$

$$\overrightarrow{CO} \times \boldsymbol{P} = -Pz_0 \cdot \boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{CD} \times \boldsymbol{Q} = (z_0 - d) \cdot Q_2 \boldsymbol{i} - (z_0 - d) Q_1 \cdot \boldsymbol{j}.$$

A párhuzamosság feltétele miatt

$$(z_0 - d) Q_2 = \lambda (P + Q_1),$$

$$(d - z_0) Q_1 - P z_0 = \lambda Q_2.$$

Az egyenlőségek osztásából

$$\frac{(z_0 - d)}{(d - z_0) Q_1 - P z_0} = \frac{P + Q_1}{Q_2}.$$

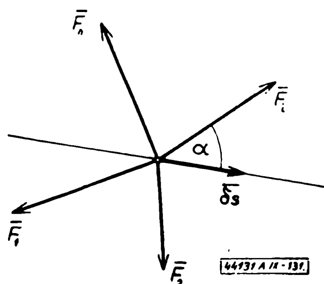
Innen

$$z_0 = \frac{Q_1^2 + PQ_1 + Q_2^2}{(P + Q_1)^2 + Q_2^2} d.$$

Megfigyelhető, hogy

$$\frac{d - z_0}{z_0} = \frac{P^2 + PQ_1}{Q_1^2 + PQ_1 + Q_2^2} = \frac{P^2 + PQ_1}{Q^2 + PQ_1},$$

tehát az az arány, amelyben a centrális tengely metszéspontja az erők távolságát osztja, csak az erők nagyságától függ. Továbbá



131. ábra

$$d - z_0 > z_0, \quad \text{ha} \quad P^2 + PQ_1 > Q^2 + PQ_1,$$

azaz, ha $P > Q$, vagyis a centrális tengely a nagyobb erőhöz van közelebb.

γ) Virtuális munka elve. (Egyensúly, reakcióerők)

29. A virtuális munka elvét alkalmazva:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{\delta s} = \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta s \cos \alpha_i = \delta s \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \alpha_i = 0$$

$$(|\boldsymbol{F}_i| = F_i|; \quad |\boldsymbol{\delta s}| = \delta s).$$

Mivel

$$\delta s \neq 0,$$

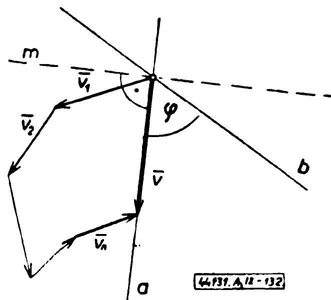
$\sum_{i=1}^{n} F_i \cos \alpha_i = 0$, azaz az erők vetületeinek összege $\boldsymbol{\delta s}$ iránya zérus. Tekintettel azonban arra, hogy szabad tömegpont esetén $\boldsymbol{\delta s}$ iránya tetszőleges lehet, ez csak akkor következik be, ha az erőkből alkotott vektorpoligon zárt, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}.$$

Ez az egyensúly feltétele egy szabad tömegpontra ható erők esetén.

Megjegyzés: nyílt vektorpoligon vetülete csak egyetlen irányra zérus: arra, amely merőleges az erők eredője hatásvonalára (m).

30. A kétoldalú ideális kényszer abban nyilvánul meg, hogy a tömegpont az előírt görbét (felületet) el nem hagyhatja és a görbe, ill. felület tökéletesen sima, súrlódásmentes; a kényszer hatását vagy úgy vesszük figyelembe, hogy a szabad erőkön kívül számításba vesszük a kényszererőt (amely a szabad erők eredőjének a pályagörbe normálsíkjába eső — felületnél az érintősíkra merőleges — összetevőjével egyenlő nagy és azzal ellenkező irányú), vagy pedig úgy, hogy kényszer esetén a $\boldsymbol{\delta s}$ virtuális elmozdulás csak a pályagörbe érintője mentén —, illetve a kényszerfelület érintősíkjában — lehetséges. Ez utóbbi — talán egyszerűbb — fogalmazás ekvivalens az elsővel.



132. ábra

Az egyensúly feltétele ebben az esetben a virtuális munka elve szerint

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \, \boldsymbol{\delta s} = \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta s \cos \alpha_i = \delta s \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \alpha_i = 0.$$

Mivel

$$\delta s \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \alpha_i = 0,$$

tehát az egyensúly feltétele az, hogy a szabad erőknek a kényszerpálya érintője irányába eső — illetve a kényszerfelület érintősíkjában fekvő — összetevőinek összege zérus legyen. Szemléletesebben megfogalmazva: a szabad erőkből alkotott vektorpoligon eredője az érintőegyenesre (érintősíkra) merőleges kell hogy legyen.

31. Vegyük észre, hogy a két tömegpontból álló rendszer két kényszer hatása alatt áll. A külső kényszert a lejtő képviseli, a belsőt a fonál. A két kényszer hatása a következőkben érvényesül:

1. Az A pont $\boldsymbol{\delta s}_1$ virtuális elmozdulása csak az egyik, a B pont $\boldsymbol{\delta s}_2$ virtuális elmozdulása csak a másik lejtő irányában lehetséges és — a fonál nyújthatatlan lévén —

2. $$|\boldsymbol{\delta s}_1| = |\boldsymbol{\delta s}_2| = \delta s.$$

Az A pont virtuális elmozdulását pl. a lejtőn felfelé — ugyanakkor természetesen a B pontét lefelé — irányítva (l. a 97. ábrát) a virtuális munka elve szerint

$$\boldsymbol{P} \, \boldsymbol{\delta s}_1 + \boldsymbol{Q} \, \boldsymbol{\delta s}_2 = P \, \delta s \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + Q \, \delta s \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= -P \, \delta s \sin \alpha + Q \, \delta s \sin \beta = 0.$$

Ebből — δs-sel való egyszerűsítés után — nyerjük az egyensúly feltételét:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

32. $$\boldsymbol{Q} \, \boldsymbol{\delta s}_1 + \boldsymbol{P} \, \boldsymbol{\delta s}_2 = 0.$$

A kényszer folytán $\boldsymbol{\delta s}_1 \uparrow\downarrow \boldsymbol{\delta s}_2$; legyen pl.

$$\boldsymbol{\delta s}_1 \uparrow\downarrow \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{\delta s}_2 \downarrow\downarrow \boldsymbol{P};$$

$$-\cos(\boldsymbol{\delta s}_1, \boldsymbol{Q}) = \cos(\boldsymbol{\delta s}_2, \boldsymbol{P}) = 1,$$

továbbá

$$|\boldsymbol{\delta s}_2| = 2\,|\boldsymbol{\delta s}_1|,$$

tehát

$$-Q \, \delta s_1 + 2P \, \delta s_1 = 0,$$

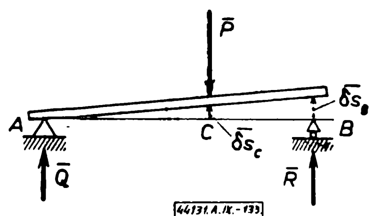
azaz az egyensúly feltétele:

$$P = \frac{Q}{2}.$$

33. Képzeljük el a rúdnak egy olyan virtuális elmozdulását, amelynek során a rúd az A pont körül a függélyes síkban elfordul. Ekkor a C pont $\boldsymbol{\delta s}_C$ elmozdulása és a B pont $\boldsymbol{\delta s}_B$ elmozdulása között a következő összefüggés áll fenn:

$$(|\boldsymbol{\delta s}_B| = \delta s_B, \quad |\boldsymbol{\delta s}_C| = \delta s_C)$$

$$\delta s_B : \delta s_C = (a + b) : a.$$



133. ábra

Az elemi munkák (ha az elfordulás szöge kicsi);

$\boldsymbol{Q}$ erőé: O (mert az A pont nem mozdul el),

$\boldsymbol{P}$ erőé: $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta s}_C = -P\,\delta s_C$,

$\boldsymbol{R}$ erőé: $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\delta s}_B = R \cdot \delta s_B = \frac{a+b}{a} R\,\delta s_C$.

Egyensúly esetén az elemi munkák összege zérus:

$$-P\,ds_C + \frac{a+b}{a} R\,\delta s_C = 0.$$

Ebből

$$|\boldsymbol{R}| = R = \frac{a}{a+b} P = \frac{a}{a+b} |\boldsymbol{P}|,$$

és

$$\boldsymbol{R} = -\frac{a}{a+b} \boldsymbol{P}.$$

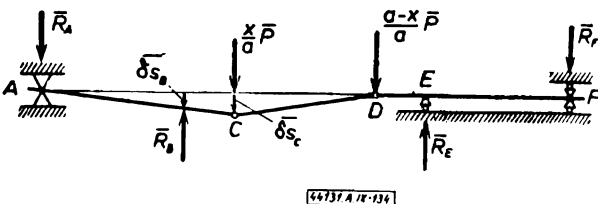
Továbbá, mivel

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} = 0,$$

$$\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{P} - \boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P} + \frac{a}{a+b} \boldsymbol{P} = -\frac{b}{a+b} \boldsymbol{P}.$$

34. Az $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{R}_E$ és $\boldsymbol{R}_F$ reakcióerők nyilván párhuzamosak és függélyes hatásvonallal bírnak. Meghatározásuk — a virtuális munka elvének felhasználásával — olyképpen történhetik, hogy a megfelelő alátámasztást megszüntetve virtuális elmozdulást engedünk meg és a közben végzett elemi munkák összegét zérussal tesszük egyenlővé.

Így pl. a B pont alátámasztását megszüntetve, a C pont virtuális elmozdulása legyen $\boldsymbol{\delta s}_C$; ugyanekkor a B pont virtuális elmozdulása $\boldsymbol{\delta s}_B$ (l. a 134. ábrát).



134. ábra

$$\delta s_B : \delta s_C = a : (a+b),$$

$$\delta s_B = \frac{a}{a+b}\,\delta s_C.$$

A $\boldsymbol{P}$ erőt felbontjuk a C pontban ható $\frac{x}{a} \cdot \boldsymbol{P}$ és a D pontban ható $\frac{a-x}{a} \cdot \boldsymbol{P}$ összetevőkre. Az elemi munka kiszámítása során az A, D, E és F pontokban ható erők nem jönnek számításba (mert e pontok nem mozdulnak el); a B és C pontok elmozdulása során a végzett összes munka — ügyelve az erők irányítására —

$$\boldsymbol{R}_B\,\boldsymbol{\delta s}_B + \frac{x}{a}\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\delta s}_C = \frac{a}{a+b}\boldsymbol{R}_B\,\boldsymbol{\delta s}_C + \frac{x}{a}\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\delta s}_C = -\frac{a}{a+b} R_B\,\delta s_C + \frac{x}{a} P\,\delta s_C = 0.$$

Ebből

$$R_B = \frac{x(a+b)}{a^2} P,$$

illetve

$$\boldsymbol{R}_B = -\frac{x(a+b)}{a^2} \boldsymbol{P}.$$

Ugyanezen a módon számítható a többi reakcióerő is. Pl. az $\boldsymbol{R}_E$ erő kiszámítása végett az E pont alátámasztását megszüntetve hasonlóan nyerjük, hogy

$$\frac{a-x}{a} \boldsymbol{P}\, \delta \boldsymbol{s}_D + \boldsymbol{R}_E\, \delta \boldsymbol{s}_E = \frac{a-x}{a} \boldsymbol{P}\, \delta \boldsymbol{s}_D + \frac{a}{a+b} \boldsymbol{R}_E\, \delta \boldsymbol{s}_D =$$

$$= \frac{a-x}{a} P\, \delta s_D - \frac{a}{a+b} R_E\, \delta s_D = 0,$$

tehát

$$R_E = \frac{(a-x)(a+b)}{a^2} P,$$

illetve

$$\boldsymbol{R}_E = -\frac{(a-x)(a+b)}{a^2} \boldsymbol{P}.$$

Ugyanígy az A támaszban fellépő reakcióerő

$$\boldsymbol{R}_A = \frac{bx}{a^2} \boldsymbol{P}.$$

Végül a negyedik reakcióerő:

$$\boldsymbol{R}_F = \frac{(a-x)b}{a^2} \boldsymbol{P}.$$

Ellenőrzésként számítsuk ki a reakcióerők összegét:

$$\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{R}_D = \frac{bx}{a^2} \boldsymbol{P} - \frac{(a+b)x}{a^2} \boldsymbol{P} - \frac{(a+b)(a-x)}{a^2} \boldsymbol{P} + \frac{b(a-x)}{a^2} \boldsymbol{P} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \boldsymbol{P}(bx - ax - bx - a^2 - ab + ax + bx + ab - bx) = \frac{1}{a^2}(-a^2)\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P},$$

amint az várható is volt.

35. Ha $\boldsymbol{Q}$ támadáspontjának elmozdulása $\delta \boldsymbol{s}$, akkor $\boldsymbol{P}$ támadáspontjának elmozdulása nyilván $3\delta \boldsymbol{s}$. $\boldsymbol{R}$ támadáspontja nem mozdul el, tehát a virtuális munka:

$$3\boldsymbol{P}\, \delta \boldsymbol{s} + \boldsymbol{Q}\, \delta \boldsymbol{s} = 0.$$

Ebből — az erők irányítása folytán —

$$\boldsymbol{Q} = -3\boldsymbol{P}.$$

Az $\boldsymbol{R}$ reakcióerő pedig a

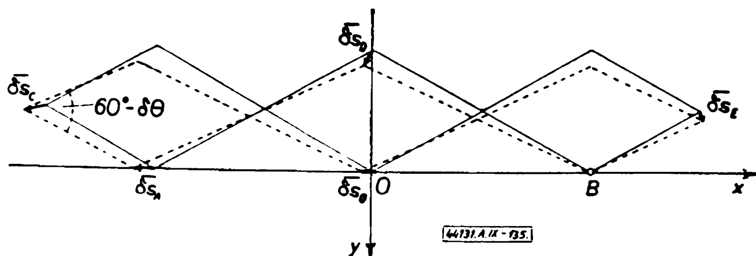
$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$$

egyenletből adódik:

$$R = -P - Q = -P + 3P = 2P.$$

36. A megoldás gondolatmenete: az A vagy B pont rögzítésének megszüntetésével olyan virtuális elmozdulást veszünk tekintetbe, melynek során az A, illetve B pont a P erő irányára merőlegesen (tehát vízszintesen) tolódik el.

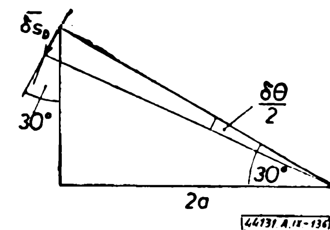
A reakcióerők X_A, Y_A, X_B, Y_B vetületeit fogjuk megállapítani az ábrán látható irányítású xy koordinátarendszerben.



135. ábra

Az A pont feltüntetett virtuális elmozdulása esetén az A, C, D, O és E pontok virtuális elmozdulásai (a B pont helyben marad!), illetve azok abszolút értékei legcélszerűbben ama $\delta\Theta$ szögváltozás segítségével fejezhetők ki, amennyivel a rudak közti 60°-os szög az elmozdulás során csökken. Ezeknek az elmozdulásoknak csak a ható erők irányába eső komponensei jönnek számításba, tehát $\boldsymbol{\delta s}_C$, $\boldsymbol{\delta s}_D$ és $\boldsymbol{\delta s}_E$-nek csak függőleges komponensei ($\boldsymbol{\delta s}_0$-nak függőleges komponense nincs). A rúdszerkezet adottságainál fogva ezek a komponensek összefüggenek egymással, így elég egyikük közvetlen kiszámítása, a többi ebből megállapítható. Így pl. $\boldsymbol{\delta s}_D$ abszolút értéke ($\delta\Theta$ kicsinysége miatt a húrt az ívvel egyenlőnek véve)

$$|\boldsymbol{\delta s}_D| = \frac{2a}{\cos 30^\circ} \cdot \frac{\delta\Theta}{2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}\,\delta\Theta.$$



136. ábra

$\boldsymbol{\delta s}_D$ függőleges összetevőjének abszolút értéke tehát

$$\frac{2a}{\sqrt{3}}\,\delta\Theta \cos 30^\circ = a\,\delta\Theta.$$

$\boldsymbol{\delta s}_E$ függőleges összetevőjének abszolút értéke ennek nyilván fele, tehát:

$$\frac{a}{2}\,\delta\Theta.$$

$\boldsymbol{\delta s}_C$ függőleges összetevőjének abszolút értéke szintén ugyanez az érték:

$$\frac{a}{2}\,\delta\Theta.$$

Végül (a vízszintes) $\boldsymbol{\delta s}_A$ abszolút értéke kétszerannyi, mint $\boldsymbol{\delta s}_D$ vízszintes komponense, tehát

$$2\frac{2a}{\sqrt{3}}\,\delta\Theta \sin 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}}\,\delta\Theta.$$

Már most az A-ban támadó reakcióerő vízszintes vetületét X_A-val jelölve és a virtuális munka elvét alkalmazva

$$-X_A \frac{2a}{\sqrt{3}}\,\delta\Theta + P\frac{a}{2}\,\delta\Theta + Pa\,\delta\Theta + P\frac{a}{2}\,\delta\Theta = 0,$$

ahonnan

$$X_A = \sqrt{3}\cdot P.$$

A szimmetriából rögtön következik, hogy a B pontban fellépő reakcióerő vízszintes vetülete ugyanekkora, de ellenkező előjelű, tehát

$$X_B = -\sqrt{3}\cdot P.$$

Végül a reakcióerők függőleges komponenseinek nyilván $4P$ erőt kell ellensúlyozniuk; mivel a szimmetria folytán ezek is egyenlő nagyok,

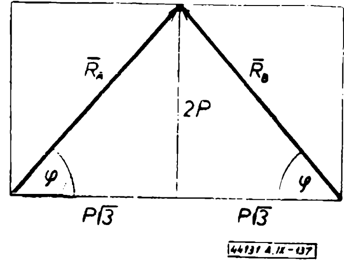
$$Y_A = Y_B = -2P.$$

A reakcióerők nagysága és iránya tehát (137. ábra):

$$|\boldsymbol{R}_A| = |\boldsymbol{R}_B| = \sqrt{3P^2+4P^2} = P\sqrt{7},$$

$$\cos\varphi = \frac{P\sqrt{3}}{P\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}},$$

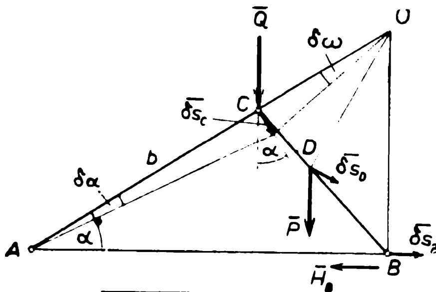
$$\varphi = 49°7'.$$



137. ábra

37. A reakcióerők közül $\boldsymbol{R}_A$ rúdirányú, $\boldsymbol{R}_B$ nem az.

Elég, ha a reakcióerők egyik, pl. vízszintes komponensét határozzuk meg. Ez úgy történhetik, hogy pl. az A támaszpont eltávolításával vízszintes irányú virtuális elmozdulás esetére alkalmazzuk a virtuális munka elvét. Az első feladat a C, D és B pontok virtuális elmozdulásainak alkalmas meghatározása. Ez az alábbi szemléletes módon történhetik (138. ábra).



138. ábra

Jelöljük O-val az AC oldal meghosszabbításának és az AB oldalra B-ben emelt merőlegesnek metszéspontját. A merev BC rúd elemi elmozdulása most úgy fogható fel, mint az O centrum (momentán centrum) körüli elemi elfordulás. Ha az elemi elfordulás szöge $\delta\omega$ (ez a rúd merevsége miatt a rúd minden pontjára ugyanaz), akkor az elemi elmozdulások abszolút értékei

$$\delta s_C = OC\cdot\delta\omega,$$
$$\delta s_D = OD\cdot\delta\omega,$$
$$\delta s_B = OB\cdot\delta\omega,$$

azaz

$$\delta s_C : \delta s_D : \delta s_B = OC : OD : OB.$$

Viszont δs_C úgy is felfogható, mint a merev AC rúd C pontjának az A pont körül történő $\delta\alpha$ szögnagyságú elemi elfordulás folytán létrejövő útja, tehát

$$\delta s_C = b\cdot\delta\alpha.$$

Felhasználván az előbb felírt aránylatot

$$\delta s_D = \frac{OD}{OC} b \cdot \delta\alpha,$$

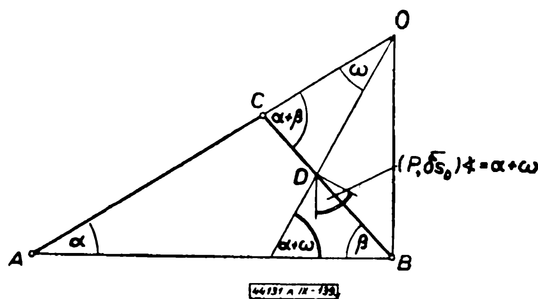
$$\delta s_B = \frac{OB}{OC} b \cdot \delta\alpha.$$

Most már felírható a virtuális munka:

$$-H_B \frac{OB}{OC} b \cdot \delta\alpha + Q \cos\alpha \cdot b \cdot \delta\alpha + P \cos(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\delta s}_D) \frac{OD}{OC} b \cdot \delta\alpha = 0.$$

Innen a B-ben fellépő reakcióerő vízszintes komponensének abszolút értéke:

$$H_B = \frac{OC}{OB} Q \cos\alpha + \frac{OD}{OB} P \cos(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\delta s}_D).$$



139. ábra

A további eljárás vagy a diagram adatainak lemérése alapján, vagy trigonometrikus úton történhetik (139. ábra).

$$AB = c,$$
$$BC = a,$$
$$CA = b,$$
$$DC = t,$$

$$\frac{OC}{OB} = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

az OCB háromszögre alkalmazott sinustétel alapján,

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta + \omega)}$$

az ODB háromszögre alkalmazott sinustétel alapján.

ω értéke az OCD háromszögre alkalmazott tangenstétel alapján a következő egyenlőségből nyerhető $\left(OC = \frac{c}{\cos\alpha} - b\right)$:

$$\frac{\frac{c}{\cos\alpha} - b + t}{\frac{c}{\cos\alpha} - b - t} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \omega\right)}.$$

Azaz

$$H_B = \frac{\cos\beta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} Q + \frac{\cos\beta \cdot \cos(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha + \beta + \omega)} P.$$

MÁSODIK RÉSZ

4. §. Lineáris egyenletrendszer

α) A determinánsok számítástechnikája

1. $A = 0$. 2. $A = -207$. 3. $A = -64{,}918$.

4. $A = -\frac{187}{150}$. 5. $A = 1 + x^2 + y^2 + z^2$. 6. $A = -2(a^3 + b^3)$.

7. $B = -2A$, mert B úgy keletkezett A-ból, hogy az első és negyedik oszlopot felcseréltük és a harmadik oszlopot szoroztuk 2-vel.

12. $A = 3375$. 13. $A = \frac{2591}{1440}$. 14. $A = 116$.

15. $A = 0$. 16. $A = 0$, mert a negyedik sor az első sor háromszorosa.

17.
$$S = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 69.$$

18. $P = a^2 - b^2$. 19. $P = 162$. 20. $P = 0$.

21. Mivel
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$ azért a

determinánsok szorzási szabályának felhasználásával (sort sorral)
$$P = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 13 & 6 & 0 \\ -7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 396.$$

22. Legegyszerűbb, ha előbb kiszámítjuk a determináns értékét, azután emelünk négyzetre. A gyakorlás kedvéért azonban számíthatjuk úgy is, hogy a determinánst szorozzuk önmagával (pl. sort oszloppal):
$$Q = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 6 & 7 & 10 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 36.$$

β) Különleges determinánsok

1. *a)* Az első oszlop elemeihez adjuk hozzá a többi oszlop elemeit, majd
b) az első oszlopból emeljük ki
$$x + (n-1)a\text{-t; ezután}$$
c) az első oszlop a-szorosát minden oszlopból kivonva, lesz
$$A_n = (x + na - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & x-a & 0 \ldots 0 \\ 1 & 0 & x-a \ldots 0 \\ 1 & 0 & 0 \ldots x-a \end{vmatrix} = (x + na - a)(x - a)^{n-1}.$$

2. Minden oszlopból a rákövetkezőt kivonjuk, majd az átalakított determinánst utolsó oszlopa (!) szerint kifejtjük, így

$$A = xyzu + xyz + yzu + zux + uxy.$$

3. $$A = xyzu + yx + xu + uz + 1$$

(l. a 7. feladat megoldását).

4. és 5. Az azonosságok a determinánsok részletes kifejtésével igazolhatók.

6. A determináns második oszlopát vonjuk le a harmadikból, az elsőt a másodikból; ezután a második oszlopból $(y_2 - y_1)$-et, a harmadikból $(y_3 - y_2)$-t kiemelve, a második és harmadik oszlop elemei egyezni fognak, tehát a determináns értéke zérus.

7. Az azonosság az utolsó sor szerint történő kifejtés alapján azonnal belátható.

8. Legyen $a_i = x[1 + \lambda_i(x)]$, ekkor

$$f(x) = x^n \cdot \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n \text{ stb.}$$

és a feladat annak igazolására redukálódik, hogy

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda_3 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \dots \lambda_n.$$

Ennek igazolása pedig a 2. feladat mintájára nem nehéz.

9. A determinánsok deriválási szabálya alapján könnyen belátható, hogy

$$F''(x) = 0,$$

tehát

$$F(x) = F(0) + x \cdot F'(0),$$

amiből az állítás egyszerűen következik.

10. Adjuk az első oszlop x-szeresét a második oszlophoz, majd (az így átalakított) második oszlop x-szeresét a harmadik oszlophoz stb., végül fejtsük ki a determinánst az utolsó oszlop szerint.

11. Minden oszlopból levonva az előtte levő x_1-szeresét, a megfelelő kiemelések után a következő rekurziós formulára jutunk:

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \cdot V_{n-1}.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) &\dots (x_n - x_1) \\ (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) &\dots (x_n - x_2) \\ (x_4 - x_3) &\dots (x_n - x_3) \\ &\dots\dots\dots \\ &(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ebből az állítás közvetlenül következik.

12.
$$|A_{ik}|\cdot A=\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & A & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & A\end{vmatrix}=A^n.$$

(Megjegyzés: ha $A = 0$, akkor egyik sora a többiből következik; de ekkor ugyanez áll A_{ik}-ra is és így állításunk erre az esetre is igaz.)

γ) Lineáris inhomogén egyenletrendszerek

1. $x = 2,\quad y = -1,\quad z = 0,$ 2. $x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{1}{3},\quad z = \frac{1}{4}.$

3. $x = 2,\quad y = 3,\quad z = 1.$ 4. $x = y = z = u = 1.$

5. Nincs megoldás, az egyenletrendszerben ellentmondás van.

6. $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3,\quad u = 4,\quad v = 5.$

7. $uv = x,\ vw = y$ helyettesítés után
$$x = 2,\quad y = 6,\quad \text{tehát}\quad u = 1,\quad v = 2,\quad W = 3.$$

8. Mindhárom egyenletet uvw-vel végigosztva, majd
$$\frac{1}{w} = x,\quad \frac{1}{u} = y,\quad \frac{1}{v} = z$$
helyettesítést felhasználva
$$u = -\frac{1}{2},\quad v = \frac{1}{3},\quad w = 1.$$

9.
$$v = ax + by + cz,$$
ahol
$$x = 1,\quad y = -1,\quad z = 2.$$

10. $P(1, 1, 1).$ 11. Nincs közös pontjuk. 12. $xy + x + y - 1 = 0.$

13. $x = 7 - 5\lambda,\quad y = -\lambda,\quad z = 3\lambda.$

14. $x = \frac{4}{3} - \lambda_1 + 2\lambda_2,\quad y = \frac{26}{3} - 5\lambda_2,\quad z = \lambda_1,\quad u = 3\lambda_2.$

15. Igen:

a) ha három sík egy egyenesben metszi egymást, akkor a harmadik az első kettő lineáris következménye; ez az eset, ha $\lambda = 3$, $\mu = 16$,

b) nincs közös pontjuk, ha az egyenletrendszer ellentmondó; ez előáll, ha $\lambda = 3$, $\mu \neq 16$.

δ) Lineáris homogén egyenletrendszerek

1. $x = 6\lambda,$
$y = \lambda,$
$z = -8\lambda.$

2. Nincs a triviálison kívül megoldás.

3. $x = 15\lambda,$
$y = -48\lambda,$
$z = -34\lambda.$

4. Az
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 3 & \lambda\end{vmatrix}=0$$
egyenletből $\lambda = -\frac{51}{16}$.

5. $x = -17\lambda,$
$y = 6\lambda,$
$z = -5\lambda,$
$u = -4\lambda.$

6. Nincs a triviálison kívül megoldás.

7. A három sík valóban egy egyenesben metsződik, mert a harmadik egyenlete az első kettő lineáris következménye; az első két egyenlet megoldása szolgáltatja a metszésvonal paraméteres egyenletrendszerét:

$$x = -\lambda, \quad y = 4\lambda, \quad z = 7\lambda.$$

8. $x = 10\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -3\lambda.$

9. $x = \lambda, \quad y = -3\lambda, \quad z = 0.$

10. $x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \lambda + \frac{1}{2}\mu, \quad u = 0.$

ε) Vegyes példák

1. Legyen az új változók együtthatóiból alkotott determináns (a transzformáció determinánsa)

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

és A_u, A_v, A_w azok a determinánsok, melyek A egyes oszlopai elemeinek x, y, z-vel való helyettesítése által keletkeznek, akkor

$$u = \frac{A_u}{A}, \quad v = \frac{A_v}{A}, \quad w = \frac{A_w}{A}.$$

2. A transzformáció determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1,$$

így ($\alpha = 45°$)

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y),$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y).$$

A transzformációt a következő vázlat szerint könnyű megjegyezni

	x'	y'
x	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
y	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$

3. Ha az új tengelyek közül

x' hajlásszöge a régi tengelyekhez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$
y' hajlásszöge a régi tengelyekhez $\beta_1, \beta_2, \beta_3,$
z' hajlásszöge a régi tengelyekhez $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$

akkor

$$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3,$$
$$y = x' \cos\beta_1 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3,$$
$$z = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1,$$

(ugyanígy a β-kra és γ-kra)

a transzformáció determinánsának értéke 1 és így

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1,$$
$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2,$$
$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3.$$

Az összefüggés a következő táblázat alapján jegyezhető meg:

	x'	y'	z'
x	$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
y	$\cos\beta_1$	$\cos\beta_2$	$\cos\beta_3$
z	$\cos\gamma_1$	$\cos\gamma_2$	$\cos\gamma_3$

4.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -93$$

és $A_{33} = -24$.
Beírva most az

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

értékeket, majd rendezés után ismét felírva a kúpszelet most már A'-vel jelzett determinánsát, a számítások végrehajtása után tapasztalhatjuk, hogy

$$A' = -93 = A$$

és

$$A_{33} = -24 = A_{33}.$$

5. A kúpszelet invariánsai

$$I_1 = -7, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = -8.$$

Mivel

$$I_3 \neq 0. \quad I_2 > 0, \quad I_1 I_2 I_3 > 0,$$

a kúpszelet valós ellipszis.

6. Az egyenletből először négyzetre emeléssel eltávolítjuk a gyököket. Az invariánsok

$$I_1 = -5, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -16.$$

A kúpszelet parabola.

7. Az invariánsok

$$I_3 = -2000, \quad I_2 = 100, \quad I_1 = -25.$$

A kúpszelet ellipszis, a centrum koordinátái:

$$x_c = 2, \quad y_c = -1.$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$$

és így a kúpszelet transzformált egyenlete

$$x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

8.

$$I_3 = -22, \quad I_2 = -3, \quad I_1 = 2,$$

$$x_c = \frac{1}{3}, \quad y_c = \frac{5}{3},$$

$$\lambda^2 + \lambda - 3 = 0,$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)x'^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{13} + 1)y'^2 + \frac{22}{3} = 0.$$

9. $p = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

10. $p = \dfrac{7}{5\sqrt{5}}$.

HARMADIK RÉSZ
(Függelék)

5. §. n-DIMENZIÓS VEKTORALGEBRA (LINEÁRIS ÉS EUKLIDESI TEREK)

a) n-dimenziós lineáris terek

α) Bevezetés. Segédeszközök

1° LINEÁRIS PROBLÉMÁK, 1'. Ismeretes, hogy korunkban a műszaki tudományok területén nagymértékben *előtérbe került a bonyolultabb lineáris* (pontosabban lineáris algebrai, differencia-, differenciál-, integrálegyenlettel vagy ilyenek rendszerével jellemezhető) *problémák vizsgálata.* Az egyszerűbb lineáris műszaki problémák megoldása túlnyomórészt már évtizedekkel ezelőtt vagy még korábban megtörtént, vált azóta közismertté és került széleskörű alkalmazásra. A lineáris műszaki problémák kisebb, de bonyolultabb részének megoldása vagy legalább ezeknek a műszaki gyakorlatban való elterjesztése és felhasználása azonban korunkra maradt. Sőt, a modern termelésnek egyre magasabb fokú szervezettségre, tervszerűségre, gépesítésre, automatizálásra, termelékenységre stb., röviden optimális üzemeltetésre való törekvése mindjobban sürgeti e feladatok elvégzését. Példaként elegendő lesz napjaink műszaki-gazdasági életének két jól ismert lineáris problémakörére, nevezetesen (a lineáris algebra területén) az ún. lineáris programozásra, (a lineáris analízis területén pedig) az ún. lineáris automatikus szabályozásra hivatkozni.

2'. A műszaki matematika az említett bonyodalmak leküzdésére *korszerűbb elméleti módszerekkel és számítási eszközökkel* igyekezett kiegészíteni hagyományos fegyvertárát, velük szemben az egyszerűbb szimbolika, a jobb áttekinthetőség és sematizálhatóság, a feltételek könnyebb általánosíthatósága, ill. a gyorsabb, megbízhatóbb és pontosabb számítástechnika stb. igényét támasztva. Így került bevezetésre, majd mind sűrűbb alkalmazásra a műszaki-gazdasági kutatás különböző területein pl. (lineáris algebrai vonatkozásban) az n-dimenziós vektoralgebra, a mátrixszámítás, (lineáris analitikai vonatkozásban) az ún. operátorszámítás stb., (számítástechnikai vonatkozásban pedig) az elektromos, sőt napjainkban már az elektronikus számolóberendezések számos, egyre tökéletesebb típusa. Kitűnő új elméleti műszaki-gazdasági szakmunkák tanúskodnak arról, hogy az említett és egyéb matematikai módszerek és eszközök használata milyen gyümölcsözőnek bizonyult.

3'. Az említett lineáris algebrai segédeszközök közül e helyen az *n-dimenziós vektoralgebra* (pontosabban a rendezett valós szám-n-esek vektortere), vele az általános *lineáris algebrai egyenletrendszerek* korszerű elméleti tárgyalása fog szerepelni, utalással *egy-két modern műszaki-gazdasági alkalmazásra. A matrixszámításból,* amely sorozatunkban önálló kötettel (C.IV.) van képviselve, itt csak néhány, nehezen nélkülözhető alapfogalmat, jelölést veszünk igénybe.

A vázolt anyag előadása során — a korszerű fogalmazás kedvéért — igénybe veszünk majd segédeszközként néhány, a *halmazokkal* és az ún. *(szám) testekkel* kap-

13 Műszaki matematikai gyakorlatok — 44 131/IX.

csolatos fogalmat, jelölést. Most ezeket foglaljuk össze röviden, bővebb kifejtés tekintetében az idevágó hazai tan- és segédkönyvekre utalva*.

II°. A HALMAZOKRÓL. 1'. A halmaz a matematika egyik alapfogalma, amely tehát egyszerűbb fogalmakra vissza nem vezethető**. Az olyan szavak, mint pl. a sokaság, összesség, rendszer, komplexus stb. csupán szinonímái, nem pedig definíciói a halmaznak.

Ez az alapfogalom igen *általános* s ezért pl. az algebra és az analízis számos területén (pl. a számok, a terek, a függvények, a transzformációk, a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálegyenletek stb. elméletében) használható korszerű segédeszközül. Ugyanakkor *egyszerű* is a halmaz alapfogalma, és a matematika, az alkalmazások, sőt a mindennapi élet szinte kézzel fogható tényeivel lehet példázni; tehát a halmazelméleti alapismeretek felhasználásától való idegenkedés a legkevésbé sem indokolt. Világítsuk meg hát néhány példával alapfogalmunk tartalmát!

1. Pl. Egy-egy halmazt képeznek többek között 1. egyetemünk évfolyamai; 2. egy évfolyam hallgatói; 3. egyetemünk sportolói; 4. egy könyvtár könyvei; 5. egy könyv lapjai; 6. egy lap betűi; 7. a naprendszer bolygói; 8. egy test molekulái; 9. egy raktárban felhalmozott árucikkek; 10. az összes egész számok; 11. a nem-negatív egész számok; 12. egy (nyílt) egyenesszakasz pontjai; 13. a sík egy adott ponttól előírt távolságra levő pontjai; 14. az összes rendezett valós szám-n-esek; 15. a rendezett valós szám-n-esek, az első $m(< n)$ helyen 0-sal; 16. a rendezett természetes számpárok; 17. egy végtelen geometriai haladvány (sorozat) elemei; 18. egy (a, b) szakaszon értelmezhető összes függvények; stb.

Azokat a „dolgokat" (objektumokat), amelyekből egy halmaz felépül, az illető *halmaz elemeinek* nevezzük. Láttuk, hogy a különböző halmazok elemei a legkülönfélébb „dolgok" lehetnek; pl. az előbb személyek, könyvek, molekulák, árucikkek, számok, szám-n-esek, pontok stb. szerepeltek elemekként. Ezzel szemben egyazon halmaz elemei *bizonyos szempontból összetartoznak;* pl. az előbb közös évfolyam, egy könyvtár, egy test, egy raktár, egész, ill. valós jelleg, egy síkrész stb. voltak az összetartozás szempontjai.

2'. Ismerkedjünk meg most néhány fontosabb halmazelméleti fogalommal és jelöléssel!

Halmazok (jelölésük latin nagybetűvel): .... $A, B, H, K, X, Y, \ldots$

Elemek (rendszerint a megfelelő kisbetűvel): .... $a, b, h, k, x, y, \ldots$

A *h eleme* a *H* halmaznak (a *h* a *H*-hoz tartozik): .... $h \in H$.

A *k nem eleme* a *H*-nak (a *h* nem tartozik a *H*-hoz): .... $k \notin H$.

A *K részhalmaza* a *H*-nak (minden $k \in K$ elem egyúttal $k \in H$ is):

$K \subset H$, vagy $H \supset K$.

A *K egyenlő a H*-val ($K \subset H$ és $H \subset K$ is igaz): .... $K = H$.

Üres halmaz (egyetlen eleme sincs, s így bármely halmaz részhalmaza lehet: Θ.

A *K valódi részhalmaza* a *H*-nak: .... $K \subset H, K \neq \Theta, K \neq H$.

Alaphalmaz (az adott feladatban szóba jöhető összes x elemek X halmaza; a feladatban minden más $H \subset X$): .... $X = \{x\}$.

Az $\alpha(x)$ *feltételnek eleget tevő* $x \in X$ elemek X_α halmaza (nyilván $X_\alpha \subset X$):

$X_\alpha = \{x : \alpha(x)\}$.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *elemek (véges) halmaza:* .... $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

* L. pl. *Rédei* [6]. *Szőkefalvi* [7], *Fazekas* [14].

** L. pl. *Grebencsa—Novoszjolov* [9] I. k. II. o.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *elemek (végtelen)* halmaza:* ...... $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.
A $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *halmazok halmaza:* .... $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$.

2. Pl. Legyen az $X = \{x\}$ alaphalmaz a Kar egész hallgatósága, a H_i, H_{ij}, L_i, S_i, P_i, K_i, Z_i pedig rendre az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, 6$) évfolyam teljes hallgatósága, ill. j-edrendű ($j = 1, 2, \ldots, 5$), leány, sportoló, pesti, kollégista, zeneértő részhallgatósága. Akkor pl.

$H_i \subset X$: az i-edik évfolyam része az egész kari hallgatóságnak;

$h_{23} \notin H_4$: a közepes rendű másodévesek nem tartoznak a negyedik évfolyamhoz ($h_{23} \in H_{23}$);

$H_{51} = \Theta$: az ötödik évfolyamban nincs elégtelen rendű hallgató;

$Z_3 \subset H_{34}$: a harmadéves zenekedvelők mind jó rendűek;

$X_{25} = \{x : \alpha(x) > 25\}$: a kari hallgatóság $\alpha = 25$ évnél idősebb része.

$\{L_1, L_2, \ldots, L_6\}$: a leány részhallgatóságok halmaza.

3'. Emlékezzünk meg most röviden a fontosabb halmazműveletekről! Ezeket az X alaphalmaz $H_1, H_2, \ldots, H_n$ részhalmazaira értelmezzük az alábbiak szerint.

A H_1 és a H_2 *egyesített halmaza, ún. uniója*** az X azon elemeinek halmaza amelyek legalább a H_1 és a H_2 egyikéhez hozzátartoznak; jele: .... $H_1 \cup H_2$

A $H_1, H_2, \ldots, H_n$ uniója (elemei legalább egy H_i-hez hozzátartoznak): $\bigcup_{i=1}^{n} H_i$.

A H_1 és a H_2 *közös része, ún. metszete**** az X azon elemeinek halmaza, amelyek a H_1 és a H_2 mindegyikéhez hozzátartoznak; jele: .... $H_1 \cap H_2$.

A $H_1, H_2, \ldots, H_n$ metszete (elemei valamennyi H_i-hez hozzátartoznak): $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$.

A H_1 és a H_2 ún. *diszjunkt halmazok*, ha nincs közös részük (vagyis az üres halmaz): .... $H_1 \cap H_2 = \Theta$.

A H_1 és a H_2 *különbséghalmaz* a H_1 azon elemeinek halmaza, amelyek a H_2-höz nem tartoznak hozzá; jele: .... $H_1 - H_2$.

A H_2 ún. *komplementer halmaza* a H_2-t az X-re egészíti ki (vagyis az X és a H_2 különbséghalmaza): .... $CH_2 = X - H_2$.

A H_1 és a H_2 ún. *szimmetrikus különbséghalmaza* (a $H_1 - H_2$ és a $H_2 - H_1$ uniója): .... $H_1 \triangle H_2 = (H_1 - H_2) \cup (H_2 - H_1)$.

3. Pl. Legyen $X, H_i, H_{ij}, L_i, S_i, P_i, K_i, Z_i$ jelentése ugyanaz, mint az előző példában. Akkor pl.

$H_1 \cup H_2$: a két alsó évfolyam hallgatósága;

$H_2 - (H_{25} \cup H_{24})$: a második évfolyam közepesnél nem jobb rendű hallgatósága;

$C(\bigcup_{i=1}^{6} L_i)$ a Kar egész fiúhallgatósága;

$(H_{45} \cup H_{44}) \subset K_4$: a jeles és jó rendű negyedévesek mind kollégisták;

$S_2 \cap Z_2 = P_2$: a második évfolyam zeneértő sportolói éppen a pestiek.

$[\bigcup_{i=3}^{6} (K_i \cap S_i)] \cap (\bigcup_{i=3}^{6} H_{i1}) = \Theta$: a felsőbb éves kollégista sportolók közt egy sincs elégtelen rendű.

* L. a 4'-et!
** Olykor összeghalmaz, ill. *** szorzathalmaz néven is szerepel.

4. Végül néhány szót a halmazok számosságáról!

Végesnek mondjuk a Θ üres halmazt és az olyan H halmazt, amelynek csupán $n \neq \infty$ eleme van, tehát azok az $1, 2, \ldots, n$ természetes számokkal megindexelhetők, s így (véges) sorozatba szedhetők. Ellenkező esetben a H halmazt *végtelennek* nevezzük.

4. Pl. Véges az 1. példabeli 1—6 halmaz.

Megszámlálható végtelen számosságúnak mondjuk az olyan H halmazt, amelynek elemei az összes $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$ természetes számok igénybevételével megszámozhatók, s így (végtelen) sorozatba rendezhetők.

5. Pl. Ilyen az 1. példabeli 17. halmaz (végtelen geometriai haladvány) és a 16. halmaz (rendezett természetes számpárok halmaza); az utóbbi elemeinek sorozatba szedése pl. (1,1); (1,2), (2,1); (1,3), (2,2), (3,1); (1,4), (2,3), (3,2) (4,1); ... módon történhet. Ennek alapján a (pozitív) racionális számok $[r = k/l > 0, \text{lko } (k,l) = 1]$ halmaza is megszámlálható*.

Vannak *magasabb számosságú halmazok* is, amelyek elemei nem indexelhetők meg az összes $(1,2, \ldots, n, \ldots)$ természetes számokkal.

6. Pl. Ilyen a *kontinuum;* egydimenziós alakja a teljes $(-\infty, +\infty)$ számegyenes (valós számhalmaz), sőt bármely nyílt (a, b) szakasza (valós számköze) is, pl. a (0,1) szakasz (számköz); ennek pontjai (számai a $\zeta = \pm x/(1-x)$ transzformációval kölcsönösen egyértelmű kapcsolatba hozhatók a $(-\infty, +\infty)$ számegyenes pontjaival, amelyek egyébként beláthatóan nem számozhatók meg csupán az $1, 2, \ldots, n, \ldots$ természetes számokkal.

A kontinuumnál nagyobb számosságú halmaz is létezik.

7. Pl. Ilyen — igazolhatóan — az (a, b) szakaszon értelmezhető összes függvények halmaza.

Befejezésül tegyünk említést a $T \neq \Theta$ *halmaztestről* mint a $H_i \subset X$ részhalmazok

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i \in T \quad \text{és} \quad \bigcup_{i=1}^{n} H_i \in T$$

tulajdonságú rendszeréről.**

8. Pl. Halmaztestet alkot az egyenes véges számú és hosszúságú szakasza (mint ponthalmaz), az üres és egypontos halmazokat is közéjük számítva.

Ha egy halmaztest említett két tulajdonsága (a második következményeként) megszámlálhatóan végtelen sok H_i részhalmaz (vagyis $i = 1, 2 \ldots, n, \ldots$ — esetén is fennáll, akkor *Borel-féle halmaztestről* beszélünk. Ez a valószínűségszámításban fontos szerepet játszik.***

III°. A (SZÁM-) TESTEKRŐL. 1'. A *β)* pontban n-dimenziós vektoralgebrát fogunk értelmezni a valós (és a komplex) számok halmazában. Ezért célszerű röviden összefoglalni az ún. algebrai struktúrákra és főleg a „test" nevű fajtájúakra vonatkozó alapismereteket.

Definiáljuk először az algebrai struktúra és a művelet fogalmát!

Az $S = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ halmazt *algebrai struktúrának* nevezzük, ha legalább egy művelet értelmezve van benne. — Az S halmazban értelmezett *műveletről* pedig akkor beszélhetünk, ha S minden α, β elempárjához egyértelműen hozzá van rendelve S egy $\alpha \circ \beta$ eleme, ahol „o" az illető művelet jele.

Elsősorban a műveletek mikéntjét és nem a struktúrák elemeinek mivoltát vizsgáljuk. Legfeljebb *két* (direkt) *műveletet* szoktunk értelmezni az $S = \{\alpha, \beta, \ldots\} \neq \Theta$ halmazban, nevezetesen

az α és β elempár $+$ jelű, $\alpha + \beta \in S$ eredményű *összeadását és*

az α és β elempár $\cdot$ jelű, $\alpha \cdot \beta \in S$ eredményű *szorzását.*

Ezek esetleges inverz műveleteit nem tekintjük önállónak.

---

* lko.: legnagyobb közös osztó.

** és *** Újabban — a halmaztesttel kapcsolatban — más elnevezések is használatosak; l. pl. *Halmos* könyvében.

E két művelet lehetséges axiomatikus tartozékai, sajátságai a következők:

neutrális elem:

(o zéruselem) $o + \alpha = \alpha + o =$ | (ε egységelem) $\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha$;

kommutativitás:

$\alpha + \beta = \alpha + \beta$ | $\alpha\beta = \beta\alpha$;

asszociativitás:

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ | $(\alpha\beta\,1 = \alpha)\,\beta\gamma)$;

disztributivitás:

$\varkappa(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (bal oldali), | $(\beta + \gamma)\,\alpha = \beta\alpha - \gamma\alpha$ (jobb oldali)

invertálhatóság, ill. regularitás:

a $\xi + \alpha = \beta,\ \alpha + \eta = \beta$ | a $\xi\alpha = \beta,\ \alpha\eta = \beta$

egyenletrendszernek pontosan, ill. legfeljebb egy ξ, η megoldása van.

Megállapodásszerűen a kommutativitást, és asszociativitást és a regularitást szoktuk mindig megkövetelni az összeadástól, továbbá a disztributivitást az összeadás és a szorzás kombinációjától; a többi axiomatikus tartozék, sajátság csak esetlegesen és csak többé vagy kevésbé forog fenn. Ettől függően különböztetjük meg az algebrai struktúrák fajait. Most — bővebb tárgyalás* nélkül összeállítjuk az *algebrai struktúrák táblázatát:*

NÉV (jel)	$\alpha + \beta$ komm., assz.	$\alpha - \beta$	$\alpha\beta$ assz.	α^{-1}	Megjegyzés
Csoport (G)			·	·	*Abel*-féle: komm.
Félcsoport (G_s)			·		esetleg reguláris
Modulus (M)	·	·			reguláris
Félmodulus (M_s)	·				
Gyűrű (R)	·	·	·		$M \cap G_s$, disztr.
Félgyűrű (R_s)	·		·		$M_s \cap . G_s$, disztr.
Ferdetest ($\hat{K}$)	·	·	·	·	$a \neq o, R \cap G; K$: komm.
Félferdetest $\hat{K}_s$)	·	·	·	·	$a \neq o, R_s \cap G K_s$: komm.

21. Foglalkozzunk most a bennünket közelebbről érdeklő algebrai struktúrákkal, a *testekkel* (vagyis a kommutatív ferdetestekkel). Itt csak ún. számtestekről fogunk beszélni (amelyek elemei számok, pl. racionális, valós vagy komplex számok), és nem lesz szó absztrakt testekről (amelyek elemei egyéb dolgok, pl. puszta jelek, bizonyos szám-, ill. ponthalmazok, geometriai alakzatok).

Természetesen, a *számtestet* minél bővebb halmaznak igyekszünk választani, hogy benne az algebrai egyenletek minél szélesebb köre legyen megoldható. Így kerül sorra majd a kiindulási *racionális* számtest kibővítése valós számtestté, továbbá ezé *komplex* számtestté. Ez utóbbiban — tudvalevőleg — már minden (egyismeretlenes) algebrai egyenlet megoldhatónak bizonyul.

Lássuk ezután a fenti táblázatban már érintett testfogalom teljes értelmezését!

* L. pl. *Rédei* [6], *Fazekas* [14].

Definíció: *Valamely $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ (szám- vagy absztrakt) halmazt az alábbi ún. t e s t a x i ó m á k teljesülése esetén nevezzük (szám-, ill. absztrakt) testnek:*

A) Bármely α, $\beta \in K$ elempárhoz hozzátartozik egy-egy jól meghatározott

$$(\alpha + \beta) \in K, \quad \text{ill.} \quad \alpha\beta \in K$$

elem, az α és β ún. összege, ill. szorzata; ez *az összeadás és a szorzás értelmezésének törvénye.*

B) Mindig igaz az, hogy

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{és} \quad \alpha\beta = \beta\alpha;$$

ez *az összeadás és a szorzás kommutatív törvénye.*

C) Mindig igaz az, hogy

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \text{ill.} \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma);$$

ez *az összeadás és a szorzás asszociatív törvénye.*

D) Mindig igaz az, hogy

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma;$$

ez az összeadás és a szorzás kombinációjának disztributív törvénye.

E) Bármely α, $\beta \in K$ elempárhoz hozzátartozik egy olyan, jól meghatározott $\gamma \in K$ elem, amelyre igaz az, hogy

$$\beta + \gamma = \alpha;$$

ez *az összeadás megfordíthatóságának törvénye;* az így meghatározott elemet $\gamma = \alpha - \beta$ módon jelöljük, és — mint a β-nak az α-ból való *kivonása* eredményét — az α és a β *különbségének* nevezzük.

F) Bármely $\beta \neq 0$, $\alpha \in K$ elempárhoz hozzátartozik egy olyan, jól meghatározott $\delta \in K$ elem, amelyre igaz az, hogy

$$\beta\delta = \alpha;$$

ez *a szorzás megfordíthatóságának törvénye;* az így meghatározott elemet $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ módon jelöljük, és — mint az α-nak a β-val való *osztása* eredményét — az α és a β *hányadosának* nevezzük.

E testaxiómákban *a racionális, a valós és a komplex számok algebrájának jól ismert alaptörvényei* ismerhetők fel. Ezek jelentőségére és következményeire (pl. az $\alpha + \xi = \alpha$ egyenletnek az α-tól független egyetlen megoldására, a $\xi = 0$ zéruselemre; az $\alpha + \eta = 0$ megoldására, az α elem $\eta = -\alpha$ ellentettjére, negatívjára; a minden α-ra teljesülő $0 \cdot \alpha = 0$ egyenletre stb.) itt nem szükséges bővebben kitérnünk.* Ugyancsak mellőzzük itt a racionális és a valós számtestben teljesülő ún. *elrendezési axiómákat.***

β) A lineáris tér és sajátságai

1°. A LINEÁRIS TÉR FOGALMA. 1'. A műszaki és természettudományokban gyakran fordulnak elő olyan halmazok, amelyeknek elemei ugyan — halmazonként — a legkülönbözőbb természetű dolgok (objektumok), de — közös vonásként — két műve-

* L. pl. *Szele* [8], *Fazekas* [14].

** Mint előbb!

letet értelmezünk bennük, nevezetesen egy *összeadás* és egy *számmal való szorzás* nevű műveletet. Mondjunk erre egy-két példát!

1. Pl. A geometriában ilyen a közönséges tér* irányított egyenes darabjai, a szűkebb értelemben vett v. *közönséges vektorok* halmaza: $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \dots\} = \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OQ}, \dots\}$. Az összeadás — tudvalevőleg — az $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OR}$ és a $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{RQ'}$ oldalvektorú paralelogram $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ'}$ átlóvektorát, az α (valós) számmal való szorzása pedig az $\boldsymbol{r}$ vektor $|\alpha|$ mértékű nyújtás—zsugorítását és a sign α-tól függő értelemtartását (+), ill. -váltását (—) eredményezi.

2. Pl. Az algebrában ilyen a közönséges vektoroknak egy x, y, z koordináta-rendszer útján megfeleltetett *rendezett (valós) számhármasok* (koordinátahármasok) halmaza: $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \dots\} = \{(x, y, z), (u, v, w), \dots\}$, az említett műveletek

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (x + u, y + v, z + w), \quad \alpha\boldsymbol{r} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

értelmezésével, sőt ennek mintájára, de közönséges geometriai szemlélettel már nem követhetően, a *rendezett (valós vagy komplex) szám-n-esek* halmaza is: $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \dots\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n), \dots\}$, az

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha\boldsymbol{r} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

módon értelmezett összeadással, ill. számmal való szorzással. A továbbiakban éppen a rendezett valós szám-n-esek halmazával fogunk leginkább foglalkozni!

3. Pl. További példák még:

Lineáris formák:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \dots\right\}; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i,$$

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot a_i x_i .$$

Polinomok (legfeljebb n-edfokúak):

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \dots\right\}; \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k,$$

$$\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha \cdot a_k x^k.$$

Matrixok ($n \times m$ típusúak):

$$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \dots\} = \{[a_{ij}], [b_{ij}], \dots\}; \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}], \quad \alpha\boldsymbol{A} = [\alpha a_{ij}].$$

Folytonos függvények (az $[a, b]$ szakaszon):

$$\{f(t), \ g(t), \ \dots\}; \ f(t) + g(t), \ \alpha f(t), \ \text{a testaxiómák szerint.}$$

2'. Avégből, hogy az összeadási és a számmal való szorzási művelettel ellátott fenti és egyéb, elemeiket tekintve a legkülönbözőbb természetű halmazokat egységesen vizsgálhassuk, bevezetjük most a lineáris tér fogalmát. Ezt értelmezi a következő

---

* Később háromdimenziós euklidesi térnek (E_3) fogjuk nevezni.

definíció: *Az* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots$ *elemeket v e k t o r o knak*, ezek* $L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\}$ *halmazát pedig vektortérnek** vagy l i n e á r i s t é rnek, vagy affin térnek nevezzük, ha értelmezve van benne*

A) *bármely két* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}$ *elem* $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} \in L$ *jelű ö s s z e g e, mégpedig az alábbi követelmények (axiómák) teljesülésével:*

a) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ *(kommutativitás);*

b) $(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p})$ *(asszociativitás);*

c) *létezik egy, az* $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}$ *egyenletet az* $\boldsymbol{r}$*-től függetlenül kielégítő* $(\boldsymbol{x} =)\ \boldsymbol{0} \in L$ *jelű, ún. zéruselem;*

d) *minden* $\boldsymbol{r}$*-hez tartozik egy, az* $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ *egyenletet kielégítő* $(\boldsymbol{y} =)\ -\boldsymbol{r} \in L$ *jelű, ún. ellentett elem; továbbá ha értelmezve van benne*

B) *bármely* $\boldsymbol{r}$ *elemnek valamely* $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ *testből vett tetszőleges* α *számmal való,* $\alpha\boldsymbol{r} \in L$ *jelű s z o r z a t a, mégpedig az alábbi követelmények (axiómák) teljesülésével:*

a) $1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$;

b) $\alpha(\beta\boldsymbol{r}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{r}$ *(asszociativitás);*

c) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{r} = \alpha\boldsymbol{r} + \beta\boldsymbol{r}$, $\alpha(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}) = \alpha\boldsymbol{r} + \alpha\boldsymbol{q}$ *(disztributivitás).*

Az A) c—d)-ből *következik,* hogy minden két $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}$ elemhez hozzárendelhető a $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}$ egyenlettel (és a $-\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{q}$ hozzáadásával) az $\boldsymbol{r}$ és a $\boldsymbol{q}$ elem $(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{p} =)\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} + (-\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}) \in L$ jelű különbsége.

Megállapodás! A továbbiakban a sűrűn előforduló „lineáris" szót (a címek, definíciók, tételek kivételével) így **rövidítjük:** *l.*

Az előbbi definícióban említett $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ számtest valós vagy komplex jellegétől függően *valós,* ill. *komplex l. térről* beszélhetünk.

A fenti definíciókban nem esett szó az összeadás és a számmal való szorzás értelmezésének mikéntjéről; ui. ez — mint az előrebocsátott példák is mutatják — az elemek természetében különböző halmazoknál más és más lehet. Ily módon nem a műveletek értelmezésének ilyen vagy olyan módja, hanem *a fenti axiómák teljesülése,* vagy nem teljesülése dönti el azt a kérdést, hogy egy halmazban értelmezett két művelet vajon vektorok összeadásának és számmal való szorzásának, maga a halmaz pedig l. térnek tekinthető-e, vagy nem.

3'. Könnyen ellenőrizhető, hogy az 1—3. példában különféle természetű halmazokra értelmezett műveletpárok a fenti axiómáknak hiánytalanul eleget tesznek, s így e halmazok valamennyien l. teret képeznek. Minthogy bennünket főleg a rendezett valós szám-n-esek lineáris tere érdekel, itt csak erre végezzük el az említett ellenőrzést.

4. Pl. Igazoljuk, hogy rendezett valós (vagy akár komplex) szám-n-esek.

$$L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots\}$$

---

* Nyilvánvaló, hogy a *vektor* fogalmát itt az eddiginél sokkal tágabb értelemben használjuk. Egyébként e fogalomhoz kapcsolódó geometriai képzeteink gyakran lesznek segítségünkre új vizsgálati eredményeink értelmezésében, sőt olykor előrelátásában.

** A vektorok halmazára több szerzőnél (pl. *Lichnerowicz*nál) ésszerűen használt *vektortér* elnevezést itt nem alkalmazzuk, mert egyrészt a hazai és a szovjet irodalomban (pl. *Gelfand*nál) a l. tér elnevezés a szokásosabb, másrészt pedig a vektortér elnevezés műszaki felsőoktatásunkban a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény által meghatározott és (nem az O origóból, hanem) az értelmezési tartomány pontjaiból felrakott $\boldsymbol{v}$ vektorok halmazának és fizikai alkalmazásainak [pl. gravitációs, elektromos, mágneses erő- (vektor-) tér] megjelölésére vált használatossá az elmúlt évtizedekben.

halmazában a 2. példa szerint, vagyis

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha\boldsymbol{r} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

módon értelmezett műveletek eleget tesznek az A) a — d) és B) a — c) axiómáknak. A rövidség kedvéért dolgozzunk az $\boldsymbol{r} = (x_i)$, $\boldsymbol{q} = (y_i)$, $\boldsymbol{p} = (z_i)$, ... $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jelölésekkel!

A) a) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (x_i + y_i) = (y_i + x_i) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$;

b) $(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{p} = (x_i + y_i) + (z_i) = (x_i + y_i + z_i) = (x_i) + (y_i + z_i) =$
$= \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p})$;

c) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{x} = (x_i + \xi_i) = (x_i) = \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{x} = (\xi_i) = (0) = \boldsymbol{0}$;

d) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{y} = (x_i + \eta_i) = (0) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} = (\eta_i) = (-x_i) = -\boldsymbol{x}$.

B) a) $1 \cdot \boldsymbol{r} = 1 \cdot (x_i) = (1 \cdot x_i) = (x_i) = \boldsymbol{r}$;

b) $\alpha(\beta\boldsymbol{r}) = \alpha(\beta x_i) = (\alpha\beta x_i) = (\alpha\beta)(x_i) = (\alpha\beta)\boldsymbol{r}$;

c) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{r} = (\alpha + \beta)x_i = (\alpha x_i + \beta x_i) = \alpha(x_i) + \beta(x_i) = \alpha\boldsymbol{r} + \beta\boldsymbol{r}$;

$\alpha(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}) = \alpha(x_i + y_i) = (\alpha x_i + \alpha y_i) = \alpha(x_i) + \alpha(y_i) = \alpha\boldsymbol{r} + \alpha\boldsymbol{q}$.

Ezek alapján a szóban forgó két műveletet vektorok összeadásának, ill. számmal való szorzásának, az L halmazt pedig l. térnek fogadhatjuk el.

II°. VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE. 1'. A továbbiakban kiemelkedő szerepet fog játszani a vektorok l. függetlenségének fogalma. Ismerkedjünk meg alaposan ezzel!

Definíció: *Az L lineáris tér adott $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorairól azt mondjuk, hogy lineárisan függnek (vagy lineáris függésben, lineárisan függő viszonyban vannak), ha találhatók olyan, nem csupa zérus α_i számok, amelyekkel a*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\boldsymbol{a}_i = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0} \qquad \text{(L)}$$

vektoregyenlet kielégíthető. Ha viszont ilyen α_i számok nem léteznek, vagyis ha e vektoregyenlet kizárólag csak az

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$$

csupa zérus együtthatók (triviális) esetében teljesül, akkor az $\boldsymbol{a}_i \in L$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorokat l i n e á r i s a n f ü g g e t l e nnek, bővebben pedig *p-edrendű lineárisan független vektorrendszert alkotónak) nevezzük.*

A l. független $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorok között *nem fordulhat elő a $\boldsymbol{0}$ zérusvektor;* tehát pl. $\boldsymbol{a}_k \neq \boldsymbol{0}$, mert ellenkező esetben — a $(0, 0, \ldots, 0)$ csupa zérus együtthatókon kívül — az $(0, 0, \ldots, \alpha_k, \ldots, 0)$ együtthatók mellett is teljesülne az előbbi vektoregyenlet, ami már az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok l. függését jelentené.

2'. Legyenek az $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorok l.-an függő viszonyban, vagyis teljesüljön az (L) vektoregyenlet, legalább egy nem zérus együttható, pl. $\alpha_1 \neq 0$ mellett. Ekkor az $\boldsymbol{a}_1$ vektor kifejezhető az (L)-ből, mégpedig

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_k - \ldots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_p =$$
$$= \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_k\boldsymbol{a}_k + \ldots + \beta_p\boldsymbol{a}_p \qquad (\alpha_1 \neq 0) \qquad \text{(K)}$$

alakban, vagyis az $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ vektorok ún. l. kombinációjaként; ha $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$, akkor legalább egy jobb oldali nem zérus együttható, pl. $\beta_k = -\alpha_k/\alpha_1 \neq 0$ is van a (K)

egyenletben. Eszerint, ha $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorok l.-an függetlenek, akkor legalább egyikük előállítható a többiek l. kombinációjaként.

Fordítva, ha az $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorok egyike, pl. $\boldsymbol{a}_1$ előállítható a többiek l. kombinációjaként, vagyis a (K) alakban, akkor nyilván teljesül az

$$\boldsymbol{a}_1 - \beta_2\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \beta_k\boldsymbol{a}_k - \ldots - \beta_p\boldsymbol{a}_p =$$
$$= \gamma_1\boldsymbol{a}_1 + \gamma_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \gamma_k\boldsymbol{a}_k + \ldots + \gamma_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0} \quad (\gamma_1 = 1) \qquad (4)$$

vektoregyenlet, mégpedig (a $\gamma_1 = 1$ miatt) nem csupa zérus együtthatók mellett, s ez már azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok l.-an függő viszonyban vannak.

Megállapodás! A továbbiakban a l. függésével kapcsolatban sűrűn szereplő hosszú műszavak (a címek, definíciók, tételek kivételével) így **rövidítjük:**

lineáris függ(ő)	l. f	lineáris függés	l. fs
lineáris független	l. ftl	lineáris függetlenség	l. ftls
lineáris függő viszony	l. f. v	lineáris kombináció	l. ko
egyenlet	egyl	rendszer	rsz
		egyenletrendszer	egylrsz

1. **Pl.** Igazolandó, hogy az

$$\boldsymbol{e}_i = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{n}{0}) = (\delta_{ij})_n \in L \quad \left(i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ha } j = i \\ 0, \text{ ha } j \neq i \end{cases}\right)$$

(egység-) vektor-n-es l. ftl, vagy másként n-edrendű l. ftl vektorrsz-t képez. — Képezve tetszőleges x_i számokkal az $\boldsymbol{e}_i$ vektorok

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{n} (0, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{r}$$

l. ko-ját, nyilvánvaló, hogy az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ feltétel kizárólag az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ csupa zérus együtthatókkal valósítható meg, ami egyszersmind az $\boldsymbol{e}_i$ vektorok l. ftls-ét jelenti.

2. **Pl.** Igazolandó, hogy a tetszőleges $a_{ij} (i > j)$ számokkal és 0-okkal képzett $\boldsymbol{a}_1 = (0, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 0, a_{32}, \ldots, a_{n2})$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_p = (0, \ldots, 0, a_{p+1,p}, \ldots, a_{np})$ $(p < n)$ vektorrsz l. ftl. —

Útmutatás: Vizsgálandó a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i = (0, x_1a_{21}, x_1a_{31} + x_2a_{32}, \ldots, x_1a_{p+1,1} + \ldots + x_pa_{p+1,p}) = \boldsymbol{0}$$

vektoregyl! (Csak $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ esetén teljesül.) Miért nem lehet $p = n$? (Mert akkor $\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}$ és x_p tetszőleges szám.)

3'. Szóljunk még néhány szót a vektorok (már említett) *lineáris kombinációjáról*, vagyis az adott $\boldsymbol{a}_i \in L$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ vektorokból és tetszőleges $x_i \in K$ számokból

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{a}_p$$

módon képzett l. vektorkifejezésről. Ezt az együtthatókra vonatkozó

$$x_i > 0, \quad x_i \geqq 0, \quad x_i < 0, \quad x_i \leqq 0$$

feltétel teljesülése esetén, rendre

pozitív, nem-negatív, negatív, nem-pozitív

l. ko néven emlegetjük.

A l. programozás elméletében kitüntetett szerepet játszik az

$$x_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

együttható-feltételeknek eleget tevő, ún. *konvex* l. ko. Egyes sajátságainak vizsgálatára később még visszatérünk.

III°. A LINEÁRIS TÉR DIMENZIÓJA, BÁZISAI. 1'. A *közönséges vektorok* (irányított egyenesdarabok)

egyenes menti, síkbeli, térbeli halmazában

vagy a geometriában használatos elnevezéssel — az

egy-, két-, háromdimenziós térben

vizsgálva a *l. ftl vektorok maximális számát,* az nyilván rendre

1, 2, 3

lesz, vagyis éppen egyenlő a dimenziószámmal.

A közönséges vektorokra vonatkozó eme megállapítást általánosítja ésszerűen az I° szerinti, tágabb értelemben vett vektorokra az alábbi

definíció: *Az $L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\}$ lineáris teret n - d i m e n z i ó snak nevezzük, ha található benne n lineárisan független vektor, de n + 1 már nem; jelölése: L_n.*

Ha az L l. térben akárhány l. ftl vektor található, akkor végtelen dimenziós l. térről (L_∞) beszélünk. Ezek vizsgálata* meghaladja e fejezet kereteit, csupán egy-két példában fogjuk érinteni.

1. Pl. Határozzuk meg a rendezett (valós) szám-n-esek $L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots\}$ l. terének dimenzióját! — A II° l. példában már megmutattuk, hogy az

$$\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) = (\delta_{ij}) \in L \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

(egység-) vektor-n-es l. ftl. Ennek felhasználásával bármely $\boldsymbol{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}) \in L$ ($k = 1, 2, \ldots, m > n$) vektor-m-es tetszőleges (ξ_k-kal képzett) $\boldsymbol{x}$ l. ko-ja

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \boldsymbol{x}_k = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \xi_k x_{ik} \right) \boldsymbol{e}_i \quad (m > n)$$

alakban állítható elő. Az $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ feltétel — az $\boldsymbol{e}_i$ — k l. ftls-e következtében — a

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n < m)$$

homogén l. egylrsz-re vezet. Ennek az (adott) $m > n$ esetben — mint látni fogjuk** — a $\xi_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) triviálison kívül még végtelen sok megoldása van, követ-

* L. pl. *Rédei* [6].

** L. a b) β) pontot!

kezésképpen a tetszőlegesen felvett $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ $(m > n)$ vektorok l. f. v-ban vannak. Ily módon az L l. térben található n l. ftl vektor, de ennél több nem, vagyis az L dimenziója n; jelekkel: $L = L_n$.

2'. A l. terek fontos tartozékai az ún. bázisok. Ezeket értelmezi a következő

definíció: *Az n-dimenziós* $L_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ *lineáris tér bármely lineáris független* $\boldsymbol{e}_i \in L_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *vektor-n-esét az* L_n *egy* *b á z i s á n a k* *nevezzük, jelölése* $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Az L_n térben — a dimenziószám fentebbi értelmezése szerint — mindig található n l. ftl vektor, vagyis az L_n-nek mindig van bázisa.

2. Pl. Mutassuk meg, hogy az L_3 térben bázist képez bármely nem-komplanáris $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ vektorhármas. — Vektorhármasunk nem tartalmazhat kollineáris vektorpárt, azaz $x_i\boldsymbol{a}_i + x_j\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{0}$, ha $\boldsymbol{x}' = (x_i, x_j) \neq \boldsymbol{0}$, mert akkor éppen komplanáris lenne. Vegyük alapul most vektorhármasunk bármely vektorpárjának, pl. az $\boldsymbol{a}_1$-nek és az $\boldsymbol{a}_2$-nek a síkját, és állítsuk elő a harmadik — esetünkben az $\boldsymbol{a}_3$ — vektort a síkbeli $\boldsymbol{a}_{3p}$ és a rá merőleges $\boldsymbol{a}_{3n}$ komponensvektor összegeként, azaz $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_{3p} + \boldsymbol{a}_{3n}$ $(\boldsymbol{a}_{3n} \neq 0)$ módon. Akkor írható, hogy

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = (x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_{3p}) + x_3\boldsymbol{a}_{3n} = \boldsymbol{a}_p + \boldsymbol{a}_n \neq \boldsymbol{0},$$

$$\text{ha} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \boldsymbol{0},$$

mert $x_3 = 0$ esetén a normális $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, de a síkbeli $\boldsymbol{a}_p = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \neq 0$, ha $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2) \neq \boldsymbol{0}$; és fordítva, $x_3 \neq 0$ esetén lehet $\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}$, de $\boldsymbol{a}_n \neq \boldsymbol{0}$. Vektoregyl-ünk tehát csak az $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{0}$ triviális esetben áll fenn, így az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ vektorhármas l. ftl, s mint ilyen — a fentebbi definíció értelmében — az L_3 egyik bázisát képezi; $B_3 = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$.

3. Pl. Az 1. példában láttuk, hogy az $L_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots\}$ l. térben az

$$\boldsymbol{e}_i = (\underset{1}{\underbrace{0}}, \underset{2}{\underbrace{0}}, \ldots, \underset{i}{\underbrace{1}}, \ldots, \underset{n}{\underbrace{0}}) = (\delta_{ij}) \in L_n \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

vektor-n-es l. ftl, s mint ilyen — az előbbi definíció értelmében — az L_n egyik (mégpedig a legcélszerűbb) bázisát képezi; $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Lássuk most az L_n egy másik bázisát! Evégből vizsgáljuk az

$$\boldsymbol{e}'_i = (\underset{1}{\underbrace{0}}, \underset{2}{\underbrace{0}}, \ldots, \underset{i}{\underbrace{1}}, \underset{i+1}{\underbrace{1}}, \ldots, \underset{n}{\underbrace{1}}) = (e'_{ji}) \in L_n, \quad \text{ahol} \quad e'_{ji} = \begin{cases} 0, \text{ ha } j < i \\ 1, \text{ ha } j \geqq i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vektor-n-est; ez is l. ftl, mert a

$$\xi_1\boldsymbol{e}'_1 + \xi_2\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + \xi_n\boldsymbol{e}'_n = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) =$$
$$= (0, 0, \ldots, 0) = \boldsymbol{0}$$

vektoregyl-ünk kizárólag csak a

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$$

triviális esetben áll fenn. Ily módon az $\boldsymbol{e}_i$ vektorok is bázist képeznek; $B'_n = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$.

IV°. A VEKTOROK BÁZISELŐÁLLITÁSA. 1'. Kérdés ezek után, hogy miként és milyen határozottsággal állítható elő egy $\boldsymbol{r} \in L_n$ vektor valamely $B_n \subset L_n$ bázis $\boldsymbol{e}_i \in B_n$ vektorai segítségével. Erre felel a következő

tétel: *Az $L_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots\}$ lineáris tér bármely $\boldsymbol{r}$ vektora* e g y é r t e l m ű e n *előállítható valamely $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bázisa vektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis*

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$$

alakban, ahol az x_i-k az $\boldsymbol{r}$ vektornak a B_n bázisra vonatkozó (egyértelműen meghatározott) k o o r d i n á t á i.

Igazolásul megfontolandó, hogy az $\boldsymbol{e}_i \in B_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bázisvektorokból és egy tetszőleges $\boldsymbol{r} \in L_n$ vektorból álló vektor $(n + 1)$-es l. f, s így a

$$\lambda\boldsymbol{r} + \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

vektoregyl nem csupa zérus együtthatókkal is kielégíthető. Így pl. $\lambda \neq 0$, mert egyébként az egyl-ből az $\boldsymbol{e}_i$-k l. fs-e következnék, (továbbá legalább egy másik együttható is, pl. $\alpha_k \neq 0$). Íly módon — a λ-val való osztás és átrendezés után — írható, hogy

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \qquad \left(x_i = -\frac{\alpha_i}{\lambda}\right),$$

tehát $\boldsymbol{r} \in L_n$ valóban *előállítható* az $\boldsymbol{e}_i \in B_n$ bázisvektorok l. ko-jaként. — Ez az előállítás egyszersmind *egyértelmű* is; ui. ha lenne $\boldsymbol{r}$-nek egy másik, pl.

$$\boldsymbol{r} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n \qquad (y_i \neq x_i)$$

alakú előállítása, akkor a kettő különbsége

$$\boldsymbol{0} = (x_1 - y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\boldsymbol{e}_n$$

volna; az így nyert vektoregyl azonban — az $\boldsymbol{e}_i$-k l. ftls-e miatt — csak az

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \ldots = x_n - y_n = 0, \quad \text{vagyis} \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$$

esetben állhat fenn, szemben az előbbi feltétellel, vagyis a két említett előállításnak meg kell egyeznie, q. e. d.

2'. Legyen adva most két vektor báziselőállítása, nevezetesen

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \in L_n, \quad \boldsymbol{q} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n \in L_n \quad (\boldsymbol{e}_i \in B_n).$$

A l. tér egyes axiómái, nevezetesen a kommutatív, az asszociatív és a disztributív törvény alapján a báziselőállítások alábbi *két műveleti szabálya* nyerhető:

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\boldsymbol{e}_n,$$
$$\alpha\boldsymbol{r} = \alpha x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Ez nyilván összhangban van a rendezett szám-n-esek már ismert (és axiomatikusan is ellenőrzött) összeadási és számmal való szorzási szabályával. Ha speciálisan, $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{r} = -x_1\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - \ldots - x_n\boldsymbol{e}_n$, akkor — az $\boldsymbol{r}$ vektortól függetlenül —

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{r} + (-\boldsymbol{r}) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{e}_n,$$

szintén összhangban a $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ *zérusvektorról* már korábban tanultakkal.

1. Pl. Határozzuk meg az $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L_n$ vektornak a

$$B'_n \ni \boldsymbol{e}'_i = (\underbrace{0}_{1}, \underbrace{0}_{2}, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \underbrace{1}_{i+1}, \ldots, \underbrace{1}_{n}) \in L_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bázisra vonatkozó ξ_i koordinátáit. — Az előző tétel és példa alapján írható, hogy

$$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\underbrace{0}_{1}, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 1, \ldots, \underbrace{1}_{n}) =$$

$$= (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n),$$

majd ebből — a megfelelő elemeket sorban egyeztetve — a

$$\xi_1 = x_1, \ \xi_2 = x_2 - x_1, \ldots, \ \xi_n = x_n - x_{n-1}$$

koordinátákat kapjuk. Megjegyzendő, hogy az $\boldsymbol{r}$, ill. az $\boldsymbol{e}'_i$ vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ill. $0, 0, \ldots, 1, 1, \ldots, 1$ koordinátái a $B_n \ni \boldsymbol{e}_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = (\delta_{ij}) \in L_n$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ bázisra vonatkoztak.

3'. Itt térjünk ki röviden a l. terek ún. izomorfizmusának fogalmára és egy-két tételére!

Definíció: *Az $L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ és az $\hat{L} = \{\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{q}}, \ldots\}$ lineáris teret egymáshoz i z o m o r f nak mondjuk, ha vektoraik között olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozás $(\leftrightarrow)$ létesíthető, hogy $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}}$ esetén* a) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{q}}$ és b) $\alpha\boldsymbol{r} \leftrightarrow \alpha\hat{\boldsymbol{r}}$; *jelölése: $L \sim \hat{L}$.*

Kérdés, vajon mely l. terek izomorfok egymással. Erre felelnek az alábbi

tételek: *Különböző dimenziójú lineáris terek nem lehetnek izomorfok egymáshoz. — A megegyező dimenziójú lineáris terek mind izomorfok egymáshoz.*

Ui. ha $L \sim \hat{L}$ és $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{q} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{q}}, \ldots$, akkor — az izomorfizmus a)—b) sajátsága alapján — az $\alpha\boldsymbol{r} + \beta\boldsymbol{q} + \ldots = \boldsymbol{0}$ vektoregyl-nek az $\alpha\hat{\boldsymbol{r}} + \beta\hat{\boldsymbol{q}} + \ldots = \boldsymbol{0}$ vektoregyl felel meg, az L l. ftl vektorainak pedig az $\hat{L}$ l. ftl vektorai, így azok maximális száma (tehát L dimenziója) ezekével (vagyis $\hat{L}$ dimenziójával) egyenlő; ily módon L és $\hat{L}$ dimenziója nem különbözhet egymástól. — Legyen továbbá L és $\hat{L}$ egyaránt n dimenziós, és legyen egy-egy bázisuk $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ és $\hat{B}_n = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n\}$. Nyilván egyértelmű egy tetszőleges $\boldsymbol{r} \in L$ vektor $\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ báziselőállításának, valamint a hasonló koordinátájú $\hat{\boldsymbol{r}} = x_1\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + x_n\hat{\boldsymbol{e}}_n \in \hat{L}$ vektornak megfelelése $(\boldsymbol{r} \to \hat{\boldsymbol{r}})$ és ugyanaz fordítva is $(\hat{\boldsymbol{r}} \to \boldsymbol{r})$; ily módon $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}}$, és világos, hogy

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (x_n y_n)\boldsymbol{e}_n \leftrightarrow (x_1 + y_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\hat{\boldsymbol{e}}_n = \hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{q}},$$

$$\alpha\boldsymbol{r} = \alpha x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha x_n\boldsymbol{e}_n \leftrightarrow \alpha x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \alpha x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + \alpha x_n\hat{\boldsymbol{e}}_n = \alpha\hat{\boldsymbol{r}}$$

szintén, vagyis $L_n \sim \hat{L}_n$, q. e. d.

2. Pl. Izomorfizmus létesíthető az irányított egyenesdarabok $L_3 = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{\overline{OR}, \overline{OQ}, \ldots\}$ l. tere és a rendezett valós számhármasok $\hat{L}_3 = \{\hat{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \ldots\}$ l. tere között, egy olyan térbeli koordináta-rendszer felvételével, amely maguk az irányított egyenesdarabok és a számhármasok mint koordinátahármasuk között az

$$\overrightarrow{OR} \leftrightarrow (x_1, y_1, r_1), \qquad \overrightarrow{OQ} \leftrightarrow (x_2, y_2, z_2)$$

kapcsolatot, műveleteik között pedig az

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ'} \leftrightarrow (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2),$$

$$\overrightarrow{OR_\alpha} = \alpha\overrightarrow{OR} \leftrightarrow (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1)$$

vonatkozást létesíti.

V°. A LINEÁRIS TÉR ALTEREI. 1'. A l. tér mint (bizonyos axiómáknak hódoló) két művelettel ellátott vektorhalmaz sajátos részhalmazait, az ún. altereket értelmezi, s ezzel a l. tér szerkezetébe való mélyebb bepillantást készíti elő a következő

definíció: *Az L lineáris térnek mint vektorhalmaznak olyan L' részhalmazait, amelyek — az L-ben értelmezett összeadási és számmal való szorzási művelettel ellátva — maguk is lineáris teret képeznek, azaz*

$$\boldsymbol{r}', \boldsymbol{q}' \in L' \subset L \quad \text{esetén} \quad \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{q}' \in L' \quad \text{és} \quad \alpha\boldsymbol{r}' \in L' \quad (\alpha \in K),$$

az L tér a l t e r e i nek nevezzük.
Mondjunk erre egy-két példát!

1. Pl. Nem valódi altérnek nevezik az L térnek csupán a 0 elemét tartalmazó ún. zérus alteret, valamint magát az egész L teret.

2. Pl. A közönséges vektorok $L_3 = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}, \ldots\} = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR} \ldots\}$ l. terében az egyenes menti

$\boldsymbol{r}_e = \overrightarrow{OR_e} = t\boldsymbol{a}\ (-\infty < t < \infty)$ vektorhalmaz L_3' (egydimenziós) altérnek, a síkbeli

$\boldsymbol{r}_s = \overrightarrow{OR_s} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}\ (-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty)$ — vektorhalmaz pedig L_3'' (kétdimenziós) altérnek minősíthető, mert

$$\boldsymbol{r}_{e1} + \boldsymbol{r}_{e2} = t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{a} = (t_1 + t_2)\boldsymbol{a} \in L_3', \qquad \alpha\boldsymbol{r}_e = \alpha t\boldsymbol{a} \in L_3',$$

illetve

$$\boldsymbol{r}_{s1} + \boldsymbol{r}_{s2} = (u_1 + u_2)\boldsymbol{a} + (v_1 + v_2)\boldsymbol{b} \in L_3'', \qquad \alpha\boldsymbol{r}_s = \alpha u\boldsymbol{a} + \alpha v\boldsymbol{b} \in L_3''.$$

3. Pl. A rendezett szám-n-esek $L_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots\}$ l. térében pl. az

$$L_n' = \{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{q}', \ldots\} = \{(0, x_2, \ldots, x_n),\ (0, y_2, \ldots, y_n), \ldots\} \subset L_n$$

vektorhalmaz szintén altér, mert

$$\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{q}' = (0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in L_n', \qquad \alpha\boldsymbol{r}' = (0, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in L_n'.$$

2'. Ezek után felvetődik a kérdés, hogy *milyen általános módszerrel* lehet egy adott L l. térből L' altereket származtatni (generálni). Erre felel a következő

tétel: *Az $L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots\}$ lineáris térnek egy olyan $L' = \{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{q}', \ldots\} \subset L$ vektorhalmaza, amelynek összes eleme*

$$\boldsymbol{r}' = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \xi_m\boldsymbol{a}_m, \qquad \boldsymbol{q}' = \eta_1\boldsymbol{a}_1 + \eta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \eta_m\boldsymbol{a}_n, \ldots$$

módon, vagyis egy $\boldsymbol{a}_j \in L$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ vektor-m-es lineáris kombinációjaként állítható elő, az L tér egyik, mégpedig az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorokkal generált a l t e r é t képezi.

Igazolásul elegendő rámutatni arra, hogy

$$\mathbf{r}' + \mathbf{q}' = (\xi_1 + \eta_1)\mathbf{a}_1 + \ldots + (\xi_m + \eta_m)\mathbf{a}_m \in L',$$
$$\alpha\mathbf{r}' = \alpha\xi_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha\xi_m\mathbf{a}_m \in L'.$$

3'. Mint tudjuk, az L' altér maga is l. tér, ezért ésszerű reá is kiterjeszteni *a dimenziószám, a bázis* stb. fogalmának érvényét. Tekintsük azért az n-dimenziós $L_n = \{\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots\}$ l. tér

$$L' = \{\mathbf{r}', \ldots\} = \left\{\sum_{j=1}^{m} \xi_j \mathbf{a}_j, \ldots\right\}$$

alterét, feltéve, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_r, \ldots \mathbf{a}_m$ generáló vektorok között csak $r(\leqq m, \leqq n)$* l. ftl található, pl. az $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{a}_r = \mathbf{e}_r$. Ez esetben valamennyi $\mathbf{r}' \in L'$ vektor

$$\mathbf{r}' = \xi_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_r\mathbf{e}_r + \xi_{r+1}\sum_{\varrho=1}^{r}\alpha_{\varrho,r+1}\mathbf{e}_\varrho + \ldots + \xi_m\sum_{\varrho=1}^{r}\alpha_{\varrho m}\mathbf{e}_\varrho =$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{r}\left(\xi_\varrho + \sum_{l=r+1}^{m}\xi_l\alpha_{\varrho l}\right)\mathbf{e}_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r}\vartheta_\varrho\mathbf{e}_\varrho \qquad (r \leqq m, \leqq n)$$

módon, vagyis a l. ftl $\mathbf{e}_\varrho = \mathbf{a}_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ generáló vektorok l. ko-jaként állítható. Egyébként r-nél több l. ftl vektor az egész L' altérben sem található; ui. a tetszőleges $\mathbf{r}'_k \in L'$ $(k = 1, 2, \ldots, p > r)$ vektorokkal képzett

$$\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{r}'_k = \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\left(\sum_{\varrho=1}^{r}\vartheta_{\varrho k}\mathbf{e}_\varrho\right) = \sum_{\varrho=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\vartheta_{\varrho k}\right)\mathbf{e}_\varrho = \mathbf{0} \qquad (p > r)$$

vektoregyl nem csupa zérus γ_k együtthatókkal is kielégíthető, sőt végtelen sokféleképpen (l. bővebben a III° 1. példát), tehát valóban bármely $\mathbf{r}'_k \in L'$ $(k = 1, 2, \ldots, p > r)$ vektor-p-s l. f. v-ban. Ily módon r az L' altér dimenziószámának, a l. ftl $\mathbf{e}_\varrho = \mathbf{a}_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ generáló vektor-r-es pedig egy bázisának tekinthető. Kimondható tehát a következő

tétel: *Az L_n lineáris tér $\mathbf{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ vektoraival generált L' altér dimenziószámát az $\mathbf{a}_j$-k között található lineárisan független vektorok r száma, egy B' bázisát pedig éppen ez utóbbi generáló vektor-r-es szolgáltatja; jelekkel: $L' = L_n^{(r)}$, ill. $B' = B_n^{(r)}$.*

4. Pl. Adjuk meg az $L_4 = \{\mathbf{r}, \mathbf{a}_j, \ldots\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}), \ldots\}$ l. tér

$$\mathbf{a}_1 = (0,\ 1,\ 1,\ 1), \qquad \mathbf{a}_2 = (0,\ 0,\ 2,\ 2), \qquad \mathbf{a}_3 = (0,\ 2,\ 0,\ 0) = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

vektoraival generált L'_4 alterének báziselőállítását! — Az előzők szerint

$$\mathbf{r}' = \xi_1\mathbf{a}_1 + \xi_2\mathbf{a}_2 + \xi_3\mathbf{a}_3 = (\xi_1 + 2\xi_3)\mathbf{a}_1 + (\xi_2 - \xi_3)\mathbf{a}_2 = \vartheta_1\mathbf{a}_1 + \vartheta_2\mathbf{a}_2 =$$
$$= \vartheta_1(0,\ 1,\ 1,\ 1) = \vartheta_2(0,\ 0,\ 2,\ 2) \in L_4^{(2)} \qquad (\vartheta_1, \vartheta_2, \in K);$$
$$B_4^{(2)} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{(0,\ 1,\ 1,\ 1,), (0,\ 0,\ 2,\ 2)\}.$$

---

* Nyilván $r \leqq n$ is fennáll, mert az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektor-m-esben nem lehet több l. ftl vektor, mint magában az L-ben.

VI°. BÁZISVÁLTÁS A LINEÁRIS TÉRBEN. 1'. Legyen adva az $L_n = \{\boldsymbol{r}, \ldots$ l. tér két bázisa, nevezetesen

$$B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \subset L_n \quad \text{és} \quad B'_n = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_j, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\} \subset L_n.$$

Mint minden $\boldsymbol{r} \in L_n$ vektor, úgy az $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j \in L_n$ bázisvektorok is egyértelmű báziselőállítással rendelkeznek mindkét bázisban, nevezetesen

$$\boldsymbol{e}'_j = \sum_{l=1}^{n} \delta_{lj}\boldsymbol{e}'_l = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i, \quad \text{ill.} \quad \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki}\boldsymbol{e}_k = \sum_{l=1}^{n} a'_{li}\boldsymbol{e}'_l \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezekből az a_{ij} és az a'_{li} *bázisvektor-koordináták összefüggése* nyilván

$$\sum_{l=1}^{n} \delta_{lj}\boldsymbol{e}'_l = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{l=1}^{n} a'_{li}\boldsymbol{e}'_l\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a'_{li}\right)\boldsymbol{e}'_l,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{li}a_{ij} = \delta_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{ha } l = j \\ 0, & \text{ha } l \neq j \end{cases}$$

módon adódik. Az utóbbi egyenletnek eleget tevő

$$\boldsymbol{e}^l = (a'_{l1}, a'_{l2}, \ldots, a'_{ln}), \quad \boldsymbol{e}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \qquad (l, j = 1, 2, \ldots, n)$$

két vektor-n-est egymás *reciprokának** szokás nevezni.

2'. Az előzők felhasználásával egy tetszőleges $\boldsymbol{r} \in L_n$ *vektor előállítása a* B_n, *ill.* a B'_n *bázisban*

$$\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j\boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j\right)\boldsymbol{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a'_{ji}\boldsymbol{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{ji}x_i\right)\boldsymbol{e}'_i$$

alakokban nyerhető. Ezekből — a megfelelő együtthatók egyeztetésével — az

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j, \quad \text{ill.} \quad x'_j = \sum_{i=1}^{n} a'_{ji}x_i$$

alakú fontos *koordinátatranszformációs formulák* adódnak. Látható, hogy a régi x_i koordináta az $\boldsymbol{e}'^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ vektor segítségével fejezhető ki az új x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_n koordinátákkal, továbbá az új x'_j az $\boldsymbol{e}^j = (a'_{j1}, a'_{j2}, \ldots, a'_{jn})$ segítségével az új $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$-nel.

3'. Itt térjünk ki a 1. ftl $\boldsymbol{a}_\varrho \in L_n$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r < n$) *vektor-r-es bázissá való kiegészítésére!* Az L_n-ből nyilván újra és újra bővíthetjük 1. ftl vektor-r-esünket olyan $\boldsymbol{e}_{r+1}, \boldsymbol{e}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ vektorokkal, amelyekkel együtt továbbra is 1. ftl vektorrsz-t képez, mert egyébként az előző 1. ftl vektorrsz bázis lenne. Ily módon egymás után $(r+1)$-ed-, $(r+2)$-ed, ..., végül n-edrendű 1. ftl vektorrsz-t kapunk; az utóbbi már L_n egy bázisa. Igaz tehát az alábbi, ún. kiegészítési

tétel: *Az L_n lineáris tér egy lineárisan független $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ $(r < n)$ vektor-r-ese $(n - r)$ alkalmas vektorral mindig kiegészíthető az L_n egy bázisává.*

VII°. GEOMETRIA A LINEÁRIS TÉRBEN. 1'. Említettük már, hogy *a rendezett valós szám-n-esek $L_n = \{\boldsymbol{r}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots\}$ $(x_i \in K_v)$ l. terében geometriai alakzatokat és tulajdonságokat* tudunk értelmezni. Bár ezeket a (geometriai-

* L. még a b) $\beta)$ IV° 3' pontot.

lag 3 dimenziós, az időt is számításba véve pedig 4 dimenziós) valóság geometriai viszonyaihoz tapadó *szemléletünkkel nem tudjuk követni*, elképzelésüket és értelmezésüket mégis jelentősen megkönnyítik számunkra *az* $L_3' = \{\overrightarrow{OP}, \ldots\}$ *l. térrel izomorf* $L_3 = \{(x_1, x_2, x_3), \ldots\}$ *l. térbeliekkel analóg és azokat általánosító analitikus kifejezések, ill. egyenletek*, valamint az L_3'-beliekkel azonos és félreérthetőség esetén *az „n-dimenziós" vagy a „hiper"-jelzővel ellátandó elnevezések*. Ez az analitikus és terminológikus analógia — az értelmezésen túlmenően — az L_n l. térbeli geometriai vizsgálatok eredményeinek helyes *kiértékelését*, sőt olykor *előrelátását* is lehetővé teszi.

2'. Lássuk ezek után *az* L_n *l. térbeli vektorgeometria néhány alapfogalmát!*

Az $L_n = \{\boldsymbol{r}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots\}$ $(x_i \in K_v)$ l. térben az origó, az x_i tengely menti egységpont és egy tetszőleges *(hiper-)pont* vektora rendre:

$$\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{e}_i = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{n}{0}), \quad \boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Az $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektort a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *vektorral párhuzamosnak* mondjuk, ha

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}, \quad \text{azaz} \quad a_i = \lambda b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda \in K_v).$$

Az x_i tengely, az origón átmenő $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ irányú és az $\boldsymbol{r}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{2n})$ ponton átmenő $\boldsymbol{v}$ irányú *hiperegyenes* vektoregyl-e, ill. skaláregylrsz-e rendre:

$$\boldsymbol{r}_i = t\boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{r} = t\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ji} = t\delta_{ji} \qquad x_i = tv_i \qquad x_i = x_{i0} + tv_i \qquad (-\infty < t < \infty);$$

mindezek egyszersmind az L_n l. tér egydimenziós alterei. Az origóból kiindulva $\boldsymbol{v}$ irányú hiper-félegyenes vagy *hipersugár*:

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{v}, \quad x_i = tv_i \quad (t \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *pontpárra illeszkedő hiperegyenes:*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = t\boldsymbol{b} + (1 - t)\boldsymbol{a}, \quad x_i = tb_i + (1 - t)a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *ponthármast kollineárisnak* mondjuk, ha pl.

$$\boldsymbol{c} = \tau\boldsymbol{b} + (1 - \tau)\boldsymbol{a}, \quad c_i = \tau b_i + (1 - \tau)a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \tau \in K_v).$$

Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, pontpárt összekötő *hiper-egyenesszakasz* (ún. egydimenziós szimplex):

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{b} + (1 - t)\boldsymbol{a}, \quad x_i = tb_i + (1 - t)a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqq t \leqq 1.)$$

Az x_i, x_j koordinátasík, az origón átmenő, $\boldsymbol{a}$-val és $\boldsymbol{b} \nparallel \lambda\boldsymbol{a}$-val párhuzamos, végül az $\boldsymbol{r}_0$ ponton átmenő, $\boldsymbol{a}$-val és $\boldsymbol{b} \nparallel \lambda\boldsymbol{a}$-val párhuzamos *hipersík* vektoregyl-e, ill. skalár-egylrsz-e rendre:

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{e}_i + v\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{r} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} \quad (i, j, l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_l = u\delta_{li} + v\delta_{lj}, \quad x_i = ua_i + vb_i, \quad x_i = x_{i0} + ua_i + vb_i \quad \begin{matrix}(-\infty < u < \infty),\\ (-\infty < v < \infty);\end{matrix}$$

mindezek az L_n l. tér kétdimenziós alterei.

A $\boldsymbol{v}$ vektort az utóbbi *síkkal párhuzamosnak* mondjuk, ha

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \quad v_i = \alpha a_i + \beta b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta \in K_v).$$

A nem-kollineáris $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *ponthármasra illeszkedő hipersík:*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + u(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + uv(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = (1-u)\boldsymbol{a} + (1-v)u\boldsymbol{b} + uv\boldsymbol{c},$$

$$x_i = (1-u)a_i + (1-v)ub_i + uvc_i$$

$$[(1-u) + (1-v)\,u + uv = 1;\ i = 1, 2, \ldots, n].$$

A nem-kollineáris $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ponthármassal meghatározott *hiperháromszög (ún. kétdimenziós szimplex)*

$$\boldsymbol{r} = (1-u)\boldsymbol{a} + (1-v)u\boldsymbol{b} + uv\boldsymbol{c}, \quad x_i = (1-u)a_i + (1-v)ub_i + uvc_i$$

$$[0 \leqq u \leqq 1, \quad 0 \leqq v \leqq 1, \quad (1-u) + (1-v) + uv = 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n].$$

Végül az L_n l. tér $\boldsymbol{r}_0$ pontra illeszkedő és a l. ftl $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ *vektorrsz-rel generált $L_n^{(r)}$ alterének* vektoregyl-e, ill. skaláregylrsz-e

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + t_r\boldsymbol{a}_r, \quad x_i = x_{i0} + t_1a_{i1} + t_2a_{i2} + \ldots + t_ra_{ir}$$

$$(-\infty < t_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

A $\boldsymbol{v} \in L_n$ vektort az $L^{(r)}$ *altérrel* kompatibilisnek* mondjuk, ha

$$\boldsymbol{v} = \tau_1\boldsymbol{a}_1 + \tau_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_r\boldsymbol{a}_r, \quad v_i = \tau_1a_{i1} + \tau_2a_{i2} + \ldots + \tau_ra_{ir}$$

$$(\tau_i \in K_v, \ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ csúcspontú *szimplex (n-dimenziós):*

$$\boldsymbol{r} = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + t_{n+1}\boldsymbol{a}_{n+1}, \quad x_i = t_1a_{i1} + t_2a_{i2} + \ldots + t_{n+1}\,a_{i,n+1}$$

$$(0 \leqq t_i \leqq 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1; \quad \boldsymbol{a}_i \in L_n, \quad B_n = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\};$$

$$\text{súlypontja} \quad t_1 = \ldots = t_{n+1} = \frac{1}{n+1}\text{-nél:} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_s).$$

Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ csúcspontú *konvex poliéder (n-dimenziós):*

$$\boldsymbol{r} = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + t_m\boldsymbol{a}_m, \quad x_i = t_1a_{i1} + t_2a_{i2} + \ldots + t_ma_{im}$$

$$(0 \leqq t_i \leqq 1, \quad \sum^{m} t_i = 1; \quad m \geqq n+1, \quad \boldsymbol{a}_i \in L_n, \quad B_n = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\};$$

$$\text{súlypontja} \quad t_1 = \ldots = t_m = \frac{1}{m}\text{-nél:} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_s).$$

* *VIII°. KÜLÖNFÉLE LINEÁRIS TEREK.* 1'. Az 1°—VII°. pontokban megadtuk az L_n térnek és számos fogalmának (pl. a l. ftls-nek, a dimenziónak, a bázisnak, az altérnek stb.) *általános* (tehát bármiféle L_n térre érvényes) *értelmezését,* ezek bizonyos alkalmazásait (pl. a báziselőállítást, a bázisváltást, geometriai vizsgálatokat stb.). Tárgyalásunk

* A vektor egyenessel, síkkal való párhuzamosságának megfelelője (2-nél) magasabb dimenzióban.

folyamán mindvégig *a rendezett valós szám-n-esek* $L_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots\}$ tere állt előtérben, könyvünk főcéljának megfelelően, bár az I°-ben másfajta l. terekről (pl. irányított egyenesdarabok, l. formák, legfeljebb n-edfokú polinomok, $[a, b]$ szakaszon folytonos függvények, $(n \times m)$ típusú matrixok stb. l. teréről), továbbá a valós K_v mellett a komplex K_z számtesten való értelmezés lehetőségéről is történt említés. Az L_n tér jelentőségének kellő értékelése érdekében most *pótlólag egy-két, nem valós szám-n-es elemű l. térrel is megismerkedünk.*

2'. Az I°1'.-beli 3. példában megadtuk a lineáris formák, a legfeljebb n-edfokú polinomok, az $[a, b]$ szakaszon folytonos függvények, az $(n \times m)$ típusú matrixok halmazában *az összeadás és a számmal való szorzás* szokásos konkrét értelmezését. Egyszerűen megmutatható, hogy mind a négy esetben hiánytalanul teljesülnek a l. tér I° 2'-beli axiómái.

Tekintsük most külön *a legfeljebb* $(n - 1)$*-edfokú polinomok*

$$L = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k, \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^b, \dots\right\}; \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k)t^k,$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$$

l. terét!

Megjegyzendő, hogy az *éppen* $(n - 1)$*-edfokú* polinomok halmaza *nem* képez l. teret, mert — a két művelet hasonló értelmezése mellett — két ilyen polinom összege alacsonyabb fokú (tehát a halmazon kívüli) polinom is lehet; pl.

$$P_4(x) + Q_4(x) = (t^4 + 2t^2 + 1) + (-t^4 + 2t^2 - 1) = 4t^2 = R_2(t).$$

Vizsgáljuk ezután példák keretében az L polinomtér dimenzió- és bázisviszonyait!

1. Pl. A legfeljebb $(n - 1)$-edfokú polinomok L terében egy (mégpedig a legegyszerűbb) l. ftl (csonka) polinom-n-es $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$. Ezzel bármely $P(t) \in L$ polinom

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$$

l. ko-ként állítható elő; együtthatói a *Taylor*-formula segítségével $a_k = P^{(k)}(0)/k!$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$ módon nyerhetők. A III°1'-beli 1. példában alkalmazott módszerrel megmutatható, hogy n-nél több ilyen polinom szükségképpen lfv-ban van. Ily módon l. terünk dimenziója n, azaz $L = L_n$, l. ftl polinom-n-esünk pedig az L_n egy bázisa, azaz

$$B_n = \{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}.$$

2. Pl. L_n terünk *egy másik bázisa* pl.

$$B_n' = \{1, (t - a), (t - a)^2, \dots, (t - a)^{n-1}\};$$

ezzel bármely $P(t) \in L_n$ *polinom báziselőállítása*

$$P(t) = b_0 + b_1(t - a) + b_2(t - a)^2 + \dots + (b_{n-1})(t - a)^{n-1} \qquad [b_k = P^{(k)}(a)/k!]$$

3. Pl. Írjuk fel L_n polinomterünk *egy-két alterét.* — A $B_n^{(n-3)} = \{1, t, t^2, \dots, t^{n-3}\}$ bázissal generált $(n - 3)$ dimenziós altér:

$$L_n^{(n-3)} = \{Q(t)\} = \{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-3} t^{n-3}\} \subset L_n;$$

$$Q_\alpha(t) + Q_\beta(t) = \sum_{j=1}^{n-3} (\alpha_j + \beta_j) t^j, \qquad \lambda Q(t) = \sum_{j=1}^{n-3} \lambda \alpha_j t^j.$$

Egy másik altér: $\quad L_n^{(1)} = \{Q(t)\} = \{\alpha_0 + \alpha_1(t - a)\} \subset L_n;$

$$Q_\alpha(t) + Q_\beta(t) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)(t - a), \qquad \lambda Q(t) = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha\,(t - a).$$

Hangsúlyozandó, hogy az L_n polinomtérről fentebb elmondottak *valós* $(t = x)$ *és komplex* $(t = z)$ *változó esetén egyaránt érvényesek.*

3'. Jegyezzük meg végül, hogy az összes (valós vagy akár komplex változós) *folytonos függvények*

$$L = \{f(t), g(t), \ldots\}; \quad f(t) + g(t) \quad \text{és} \quad \alpha f(t) \qquad \text{(a textaxiómák szerint)}$$

l. terében akárhány l. ftl függvény található, így l. terünk nyilván *végtelen dimenziós*, $L = L_\infty$. *Egy bázisa, báziselőállítása, altere* pl. rendre

$$B_\infty = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}, \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \in L_\infty, \qquad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \in L_\infty^{(n)}.$$

b) n-dimenziós euklidesi terek

α) Az euklidesi tér és sajátságai

I°. SKALÁRIS (BELSŐ) SZORZAT. 1'. Az *a) β)* I°-ben a *l. teret* úgy értelmeztük, mint ilyen vagy olyan fajta dolgok (pl. szám-n-esek, matrixok, l. formák, legfeljebb n-edfokú polinomok, folytonos függvények stb.) bizonyos axiómáknak hódoló két művelettel, *az ún. összeadással és a számmal való szorzással ellátott halmazát.* Az *a) β)* II°—V°-ben megismerkedtünk a l. tér olyan tartozékaival, tényeivel, mint a dimenzió, a bázis, a báziselőállítás, az altér, az izomorfizmus, a báziscsere stb. Az *a) β)* VI°-ban sor került bizonyos n-dimenziós geometriai alakzatok és tulajdonságok értelmezésére; szóba jött pl. a hiperpont, két vektor párhuzamossága, a hiperegyenes, a hipersík, vektor és hipersík párhuzamossága, vektor és altér párhuzamossága, a két- és n-dimenziós szimlex stb. Látnunk kell azonban, hogy az l. tér *a) β)* I°—V°. apparátusa *szűknek bizonyult* az ún. (n-dimenziós) euklidesi geometria számos fontos tényének átfogására; ilyenek pl. a vektor hossza, két hiperpont távolsága, két vektor hajlásszöge, merőlegessége, vektor és hipersík, ill. altér merőlegessége stb.

2'. Az alábbiakban megadjuk a valósban a skaláris (belső) szorzat értelmezését. Az így adódó *bővebb vektoralgebra* már alkalmas lesz a teljes valós euklidesi geometria felépítésére, sőt később a komplex euklidesi és a hermiti geometriává való kiszélesítésére.

Definició: *Az $L = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\}$ valós lineáris térben az $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{q}$ vektorpárhoz rendelt $\boldsymbol{rq}$ $(= \alpha \in K_v)$ jelű valós számot az $\boldsymbol{r}$ és a $\boldsymbol{q}$ skaláris vagy belső szorzatának* nevezzük, ha teljesülnek reá az alábbi axiómák:*

a) $\boldsymbol{rq} = \boldsymbol{qr}$ *(kommutativitás),*

b) $(\alpha\boldsymbol{r})\boldsymbol{q} = \alpha(\boldsymbol{rq})$ *(asszociativitás a számmal való és a skaláris szorzás között),*

c) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{rq} + \boldsymbol{rp}$ *(disztributivitás),*

d) $N(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^2 > 0$, ha $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ és $N(\boldsymbol{r}) = 0$, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ *(euklidesi norma).*

Az előbbi definícióban nem esett szó a skaláris (belső) szorzás értelmezésének mikéntjéről; ui. ez — mint látni fogjuk — különböző természetű l. terekben más és más lehet. Ezért nem az értelmezés ilyen vagy olyan módja, hanem a fenti axiómák teljesülése szükséges ahhoz, hogy egy bizonyos természetű l. térben valamely művelet skaláris (belső) szorzásnak fogadhassuk el.

Lássunk most egy-két példát (később még többet is) a skaláris (belső) szorzás konkrét értelmezésére!

---

* Mint a *α)* VI°-ban látni fogjuk, a komplex számtesten értelmezett térben a skaláris és a belső szorzat lényegesen különbözik.

1. Pl. A *közönséges vektorok* $L_3 = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\} = \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}, \ldots\}$ l. terében a skaláris szorzást — tudvalevőleg —

$$\boldsymbol{rq} = rq \cos \varphi \ [r = |\boldsymbol{r}| = \overline{OR}, \quad q = |\boldsymbol{q}| = \overline{OQ}, \quad \varphi = \text{arc}\,(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q})]$$

módon értelmezzük. E művelet kielégíti a fentebbi axiómákat; nevezetesen:

ad a) $\boldsymbol{rq} = rq \cos \varphi = qr \cos \varphi = \boldsymbol{qr}$;

ad b) $\alpha(\boldsymbol{r})\boldsymbol{q} = |\alpha|\, rq \cdot \text{sign}\, \alpha \cdot \cos \varphi = \alpha(rq \cos \varphi) = \alpha(\boldsymbol{rq})$;

ad c) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}) = r(q \cos \beta + p \cos \alpha) \cos \varepsilon = r \cos \delta(q \cos \beta + p \cos \alpha) \cos \gamma =$

$= r_t q(\cos \gamma \cos \beta - \text{cins}\, \gamma \sin \beta) + r_t p(\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha) =$

$= r_t q \cos (\gamma + \beta) + r_t p \cos (\gamma - \alpha) = rq \cos \varphi + rp \cos \psi = \boldsymbol{rq} + \boldsymbol{rp}$

[ahol $q \sin \beta = p \sin \alpha, \qquad \cos \varepsilon = \cos \delta \cos \gamma,$

$\cos \varphi = \cos \delta \cos (\gamma + \beta), \qquad \cos \psi = \cos \delta \cos (\gamma - \alpha)$];

ad d) $N(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^2 = r^2 > 0$, ha $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ és $N(\boldsymbol{r}) = 0$, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

2. Pl. A *rendezett valós számhármasok* $L_3 = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\} = \{(x, y, z), (u, v, w), (k, l, m), \ldots\}$ $(x, u, w, \ldots \in K_v)$ l. terében (amely — mint korábban láttuk — az előbbi L_3 l. térhez izomorf) a skaláris szorzást — tudvalevőleg —

$$\boldsymbol{rq} = xu + yv + zw$$

módon értelmezzük. Ez is eleget tesz a fentebbi axiómáknak; nevezetesen:

ad a) $\boldsymbol{rq} = xu + yv + zw = ux + vy + wz = \boldsymbol{qr}$;

ad b) $(\alpha\boldsymbol{r})\boldsymbol{q} = (\alpha x)u + (\alpha y)v + (\alpha z)w = \alpha(xu + yv + zw) = \alpha(\boldsymbol{rq})$;

ad c) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}) = x(u + k) + y(v + l) + z(w + m) =$

$= (xu + yv + zw) + (xk + yl + zm) = \boldsymbol{rq} + \boldsymbol{rp}$;

ad d) $N(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 > 0$, ha $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ és $N(\boldsymbol{r}) = 0$, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

3'. Tekintsük most a *rendezett valós szám-n-esek*

$$L_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots\}$$
$$(x_i, y_i, z_i, \in K_v)$$

l. terét, ahol x_i, y_i, z_i rendre az $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ vektornak bármely tetszőleges, de a továbbiakban rögzítendő $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *bázisra* vonatkozó koordinátái, azaz

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \ldots, \qquad \boldsymbol{p} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + z_n\boldsymbol{e}_n.$$

A rendezett valós számhármasok mint háromdimenziós vektorok ismert (és az előző példában is tárgyalt) skaláris szorzatának analógiájára most

$$\boldsymbol{rq} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

módon kíséreljük meg a skaláris (belső) szorzást a rendezett valós szám-n-esekre mint n-dimenziós vektorokra általánosítani. Megmutatjuk egyszersmind, hogy ez az értelmezés eleget tesz a 2'-ben felsorolt axiómáknak:

ad a) $\boldsymbol{rq} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = \boldsymbol{qr}$,

ad b) $(\alpha\boldsymbol{r})\boldsymbol{q} = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \ldots + (\alpha x_n)y_n = \alpha \cdot (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots +$
$+ x_ny_n) = \alpha(\boldsymbol{rq})$,

ad c) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}) = x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + \ldots + x_n(y_n + z_n) =$
$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) + (x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n) = \boldsymbol{rq} + \boldsymbol{rp}$,

ad d) $N(\boldsymbol{r}) = r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$, ha $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ és $N(\boldsymbol{r}) = 0$, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$,

q. e. d. Ily módon az előbb értelmezett művelet valóban elfogadható skaláris (belső) szorzásnak.

3. Pl. Az előbb említett bázis $\boldsymbol{e}_i \in B_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorai magára a B_n-re vonatkozólag

$$\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij}) = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{n}{0}) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

rendezett koordináta-n-esekkel jellemezhetők (mint tudjuk, egyértelműen). E bázisvektorok skaláris (belső) szorzatai és normái — az előbb tanultak szerint — így alakulnak:

$$\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = 0 \quad (j \neq k) \quad \text{és} \quad N(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i^2 = 1 \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

vagy rövidebben — a *Kronecker*-féle szimbólum alkalmazásával —

$$\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k, \\ 0, & \text{ha } j \neq k, \end{cases}$$

vagyis bármely két különböző bázisvektor skaláris szorzata zérus, és valamennyi egységnyi normájú, a B_n bázisra vonatkozólag. (Később ezért a B_n bázist „ortonormált"-nak fogjuk nevezni.)

II°. *A VALÓS EUKLIDESI TÉR.* 1'. A skaláris (belső) szorzatnak valamely valós l. térben történő konkrét értelmezésénél hangsúlyozni kell egy tetszőleges, de a továbbiakban rögzítendő B_n bázisra való vonatkozását (mint ezt — a rendezett valós szám-n-esek l. terével kapcsolatban — a 3'-ben is tettük), mert *az* $\boldsymbol{rq}$ *(és az* $\boldsymbol{r}^2$*) számértéke n e m invariáns az alapul vett* B_n *bázisról egy tetszőleges (!)* B_n' *bázisra való áttéréssel szemben.* Ui. az *a) β)* VI° 2'-ben megadott koordináta-transzformációs formula felhasználásával, majd a különböző indexek szerinti összegezés alkalmas felcserélésével írható, hogy

$$\boldsymbol{rq} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j'\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k'\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}\right)x_j'y_k' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_j'y_k',$$

ahol bevezettük a

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{ij} = c_{kj}$$

jelölést. Látható, hogy általában

$$\boldsymbol{rq} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \neq \sum_{i=1}^{n} x_j'y_j' = \boldsymbol{r}'\boldsymbol{q}'$$

csupán a (később még érintendő) $c_{kj} = \delta_{kj}$ speciális esetben áll elő az $\boldsymbol{rq} = \boldsymbol{r}'\boldsymbol{q}$ helyzet.

2'. A fenti előkészületek után most kimondható az alábbi

definíció: *Valós euklidesi térnek nevezzük az olyan $L_n = \{\boldsymbol{r}, \ldots\}$ valós lineáris teret, amelyben értelmezve van (az összeadáson és a számmal való szorzáson kívül) a skaláris (belső) szorzás (is), mégpedig az I°2' szerint [vagyis a)—d) axiómák kielégítésével], továbbá egy tetszőleges, de rögzített $B_n \subset L_n$ bázisra vonatkozólag; jelölése: E_n.*

Megállapodás újabb **rövidítésben**: euklidesi — eu.

Külön is felhívjuk a figyelmet a valós eu. térnek arra az [a skaláris (belső) szorzat definíciójában, a *d)* axiómában rögzített] *alapvető tulajdonságára,* hogy *bármely $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ vektor normája pozitív, csupán a $\boldsymbol{0}$ vektor normája 0.* A később említendő komplex eu. tér — mint látni fogjuk — nem rendelkezik e fontos sajátsággal, amennyiben $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ vektor normája is lehet 0, sőt negatív is.

Megjegyzendő, hogy a valós eu. térnek ugyanúgy, mint a valós l. térnek, nemcsak rendezett valós szám-n-esek lehetnek elemei, hanem pl. legfeljebb $(n-1)$-edfokú valós polinomok, egy (a, b) szakaszon folytonos valós függvények is stb. Az ilyen terekre később még visszatérünk.

3'. Említést érdemel, hogy *a rendezett valós szám-n-esek mint vektorok skaláris (belső) szorzatának* (és ezáltal, a megfelelő valós eu. térnek is) az I° 3'-nál *tágabb értelmezést* is adhatunk. Ezt a gondolatot éppen az 1'-ban végzett invarianciavizsgálat sugalmazza.

Legyen adva az $L_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n) \ldots\}$ valós l. tér, ahol ξ_i, ill. η_i az $\boldsymbol{r}$, ill. $\boldsymbol{q}$ vektornak egy tetszőleges, rögzített $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \subset L_n$ bázisra vonatkozó koordinátái, továbbá, ahol a l. műveletek a hagyományos

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n) \in L_n,$$

$$\alpha\boldsymbol{r} = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n) \in L_n$$

módon vannak értelmezve. Ezzel szemben kíséreljük meg most a *skaláris (belső) szorzást* a hagyományostól eltérő

$$\boldsymbol{rq} = \boldsymbol{r}\mathbf{C}\boldsymbol{q} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_j\eta_k =$$

$$= c_{11}\xi_1\eta_1 + c_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + c_{1n}\xi_1\eta_n +$$
$$+ c_{21}\xi_2\eta_1 + c_{22}\xi_2\eta_2 + \ldots + c_{2n}\xi_2\eta_n +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ c_{n1}\xi_n\eta_1 + c_{n2}\xi_n\eta_2 + \ldots + c_{nn}\xi_n\eta_n$$

módon* értelmezni és egyben megvizsgálni, hogy a $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ jelű, ún. n-edrendű kvadratikus matrixnak milyen feltételeket kell kielégítenie a skaláris (belső) szorzás összes axiómáinak teljesülése érdekében.

Az *a)* axióma — az

$$\boldsymbol{rq} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_j\eta_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\eta_k\xi_j = \boldsymbol{qr}$$

---

* Az $\boldsymbol{r}\mathbf{C}\boldsymbol{q}$ itt csak puszta jelölés, amely azonban később aritmetikai alátámasztást is kap.

értelmében — azt kívánja, hogy a **C** matrix *szimmetrikus*, azaz

$$c_{jk} = c_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sajátságú legyen. A *b)* és *c)* axióma nem támaszt újabb igényt a **C** matrixszal szemben. A *d)* axióma viszont azt követeli, hogy a normát szolgáltató

$$\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r}\mathbf{C}\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\xi_j\xi_k$$

ún. *kvadratikus forma definit pozitív** (azaz minden $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ vektorra pozitív, magára az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ vektorra pedig, triviálisan, zérus) legyen. Ezek szerint a skaláris (belső) szorzás szóban forgó értelmezése minden szimmetrikus és pozitív definit kvadratikus formával rendelkező **C** matrixszal lehetséges.

Ha speciálisan $\mathbf{C} \equiv \mathbf{E} = [\delta_{jk}]$ (egységmatrix), akkor a skaláris (belső) szorzat a hagyományos

$$\boldsymbol{rq} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\eta_j$$

alakra egyszerűsödik, s ezzel egyszersmind az I° 3'-ben értelmezett eu. térhez jutunk.

1. Pl. Igazolandó, hogy a

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrixok közül az első nem alkalmas, a második viszont alkalmas az előbbiek szerinti skaláris szorzás értelmezésére.

III°, VEKTOROK HOSSZA, HAJLÁSSZÖGE. 1'. Most, a skaláris (belső) szorzás birtokában, bevezethetünk néhány olyan vektorgeometriai fogalmat, amely — a l. tér vektorgeometriai apparátusával együtt — már alkalmas lesz az egész n-dimenziós valós euklidesi geometria uralására.

A közönséges vektorok $E_3 = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\} = \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OQ}, \ldots\}$ eu. terében — az $\boldsymbol{rq} = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{q}| \cos\varphi$ módon értelmezett skaláris szorzás felhasználásával —

$$|\boldsymbol{r}| = +\sqrt{\boldsymbol{r}^2} \qquad (\boldsymbol{r}^2 = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{r}| \cos 0 = |\boldsymbol{r}|^2)$$

módon értelmezik a vektor hosszát. Ezt terjeszti ki az $E_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ valós eu. térre az alábbi

definíció: *Az $E_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ valós euklidesi térben az $\boldsymbol{r}$ vektor hosszát az $\boldsymbol{r}$ (valós euklidesi) normája pozitív négyzetgyökeként értelmezzük* és $|\boldsymbol{r}|$ *módon jelöljük, azaz*

$$r = |\boldsymbol{r}| = +\sqrt{\boldsymbol{r}^2} = +\sqrt{N(\boldsymbol{r})} \quad (\geqq 0) \quad [N(\boldsymbol{r}) \geqq 0].$$

Az $\boldsymbol{r}$ vektor és $|\boldsymbol{r}|$ hossza segítségével $|\boldsymbol{r}|\,\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{r}$ módon értelmezhető az $\boldsymbol{r}$ *vektor $\boldsymbol{r}^0$ normált (egység-) vektora.* Ez az értelmezés $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ esetén egyértelmű, nevezetesen

$$\boldsymbol{r}^0 = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \in E_n$$

$$\left[\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}, \quad \text{és így} \quad |\boldsymbol{r}| \neq 0, \quad N(\boldsymbol{r}^0) = \boldsymbol{r}^{02} = \frac{\boldsymbol{r}^2}{|\boldsymbol{r}|^2} = 1\right]$$

* L. bővebben C. VII. kt. 3. §., továbbá *Geldfand* [2] 6. §.

az $r = 0$ ($|r| = 0$) esetében azonban a $0 \cdot r^0 = 0$ egyl-et nyilván bármely ($r^0 =$) $a \in E_n$ vektor kielégíti.

Ugyancsak az E_3 mintájára, az E_n térben r és a q „pont" d távolságát az $r - q = r + (-q)$ különbségvektor hosszaként értelmezzük, vagyis

$$d = |r - q| = \sqrt{(r-q)^2} = \sqrt{r^2 - 2rq + q^2} \quad (\geqq 0).$$

1. Pl. A rendezett valós szám-n-esek hagyományos $E_n = \{r, q, \ldots\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots\}$ eu. terében az r vektor hossza és az r és a q pont távolsága nyilván így alakul:

$$r = |r| = \sqrt{r^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

$$d = |r - q| = \sqrt{(r-q)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y)_n{}^2}.$$

A rendezett valós szám-n-esek II° 3'-ben említett, tágabb értelmezésű $E_n = \{r, q, \ldots\} = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \ldots\}$ eu. terében az előbbi hosszmértékek így festenek:

$$r = |r| = \sqrt{r^2} = \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{jk}\xi_j\xi_k\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d = |r - q| = \sqrt{(r-q)^2} = \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{jk}(\xi_j - \eta_j)(\xi_k - \eta_k)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

2'. Ésszerű az a törekvésünk, hogy az E_n valós eu. térre is *kiterjesszük* a közönséges vektorok E_3 terében két vektor, valamint hosszuk és hajlásszögük között fennálló

$$rq = |r||q| \cos \varphi$$

összefüggést. Kérdés, vajon megvan-e erre a lehetőség. A választ készíti elő a következő

***tétel:** Két $r, q \in E_n$ vektor skaláris (belső) szorzata és normája között az*

$$(rq)^2 \leqq N(r) \cdot N(q) = r^2 \cdot q^2 = |r|^2 \cdot |q|^2.$$

alakú, Schwarz—Cauchy—Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség áll fenn.

Ui. tetszőleges valós λ felhasználásával írható, hogy az $(r + \lambda q)$ vektor normája

$$N(r + \lambda q) = (r + \lambda q)^2 = r^2 + 2\lambda rq + \lambda^2 q^2 = N(r) + 2\lambda(rq) + \lambda^2 N(q) \geqq 0;$$

ezért kell, hogy e kvadratikus alak diszkriminánsa

$$4[(rq)^2 - N(r) \cdot N(q)] \leqq 0, \quad \text{azaz} \quad N(r) \cdot N(q) \geqq (rq)^2$$

legyen, q. e. d.

E tétel fontos *következménye*, hogy

$$\left|\frac{rq}{\sqrt{N(r) \cdot N(q)}}\right| \leqq 1, \quad \text{azaz} \quad -1 \leqq \frac{rq}{|r||q|} = r^0 q^0 \leqq 1 \quad (r, q \neq 0).$$

Ily módon egyértelműen megállapítható olyan φ szög, amelyre nézve

$$\cos \varphi = \frac{rq}{|r||q|} = r^0 q^0 \quad (0 \leqq \varphi \leqq \pi;\ r, q \neq 0).$$

Kimondható tehát az alábbi

definíció: *Az $E_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ valós euklidesi térben a $\boldsymbol{0}$-tól különböző $\boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{q}$ vektor h a j l á s s z ö g é t*

$$\varphi = \arc\cos \frac{\boldsymbol{rq}}{|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{q}|} = \arc\cos (\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{q}^0) \qquad (0 \leqq \varphi \leqq \pi;\ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0})$$

módon értelmezzük.

Egyszersmind megállapíthatjuk, hogy *siker* koronázta azon törekvésünket, hogy a skaláris (belső) szorzatot az E_n térben is előállítsuk $\boldsymbol{rq} = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{q}| \cdot \cos\varphi$ alakban.

Megjegyezzük, hogy ésszerű — a közönséges vektorok E_3 tere mintájára — az

$$r_q = |\boldsymbol{r}| \cos\varphi = \boldsymbol{rq}^0 \gtreqless 0$$

szorzatot geometriailag *az $\boldsymbol{r}$ vektornak a $\boldsymbol{q}$ vektorra vonatkozó előjeles vetületeként értelmezni.*

Említésre méltó végül, hogy a $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q} \in E_n$ pontpár $d = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}|$ távolságának fentebbi formulája — a $\cos\varphi$ előbbi értelmezésének figyelembevételével —

$$d = \sqrt{\boldsymbol{r}^2 - 2\boldsymbol{rq} + \boldsymbol{q}^2} = \sqrt{r^2 + q^2 - 2rq\cos\varphi}$$

alakot ölt; ez azt jelenti, hogy az E_3-ból jól ismert *cosinustétel* érvényét is sikerült az E_n térre kiterjeszteni.

2. Pl. A rendezett valós szám-n-esek szokásos és tágabb értelmezésű E_n terében (l. az 1. példát) a *Schwarz*-féle egyenlőtlenség — beláthatóan —

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

illetve

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\xi_j\eta_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\xi_j\xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\eta_j\eta_k\right)$$

alakot ölt.

3. Pl. Állapítsuk meg az $\boldsymbol{r} = (1, 0, -2, -3)$, $\boldsymbol{q} = (3, -1, -2, 0) \in E_4$ vektorpár hajlásszögét!

4. Pl. Igazolandó az E_n térbeli *háromszög-reláció!* — A *Schwarz*-féle egyenlőtlenség felhasználásával írható, hogy

$$|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}|^2 = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q})^2 = \boldsymbol{r}^2 + 2\boldsymbol{rq} + \boldsymbol{q}^2 \leqq \boldsymbol{r}^2 + 2|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{q}^2 =$$
$$= |\boldsymbol{r}^2| + 2|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{q}| + |\boldsymbol{q}|^2 = (|\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{q}|)^2, \qquad \text{q. e. d.}$$

3'. A közönséges vektorok $E_3 = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ eu. terében a $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}$ vektorpár merőlegességének ($\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{q}$) feltétele

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{rq}}{|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{q}|} = \boldsymbol{r}^0\boldsymbol{q}^0 = 0, \qquad \text{tehát} \qquad \boldsymbol{rq} = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{q}|\cos\varphi = 0$$

volt. Ha pl. $\boldsymbol{r} = 0$, akkor $\boldsymbol{r}^0$ és φ határozatlan, tetszőleges (*s* így $\boldsymbol{r}^0 \perp \boldsymbol{q}^0$, $\varphi = \pi/2$ módon is választható), de $|\boldsymbol{r}| = 0$, és ezért $\boldsymbol{rq} = 0$. Mindezek figyelembevételével két tetszőleges $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q} \in E_3$ vektor merőlegességének (szükséges és elégséges) feltétele az $\boldsymbol{rq} = 0$ egyl teljesülése.

Értelemszerűen hasonló megfontolással nyerhető az E_n térbeli merőlegességet meghatározó alábbi

definíció: *Az* $E_n = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ *valós euklidesi térben két tetszőleges* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}$ *vektort akkor és csak akkor mondunk ortogonálisnak (merőlegesnek) és jelölünk* $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{q}$ *módon, ha teljesül rájuk az*

$$\boldsymbol{rq} = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{q}| \cos \varphi = 0$$

kritérium.

5. Pl. A rendezett valós szám-n-esek szokásos és tágabb értelemben vett E_n terében (l. az 1. példát) a merőlegesség most említett kritériuma konkréten

$$\boldsymbol{rq} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = 0,$$

illetve

$$\boldsymbol{rq} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{jk} \xi_j \eta_k = 0$$

alakot ölt.

6. Pl. Igazolandó az E_n térbeli *Pythagoras*-tétel! — Legyen $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q} \in E_n$ és $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{q}$, azaz $\boldsymbol{rq} = 0$. A skaláris (belső) szorzás disztributivitásának felhasználásával írható, hogy

$$|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}|^2 = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q})^2 = \boldsymbol{r}^2 + 2\boldsymbol{rq} + \boldsymbol{q}^2 = \boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{q}^2 = |\boldsymbol{r}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2,$$

q. e. d. E tétel általánosítható is: ha az $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots \in E_n$ vektorok páronként merőlegesek, akkor

$$|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} + \ldots|^2 = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} + \ldots)^2 =$$
$$= \boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{p}^2 + \ldots + 2\boldsymbol{rq} + 2\boldsymbol{rp} + 2\boldsymbol{qp} + \ldots =$$
$$= \boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{p}^2 + \ldots = |\boldsymbol{r}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2 + |\boldsymbol{p}|^2 + \ldots.$$

4'. Jegyezzük meg, hogy egy vektor hossza, két pont távolsága, két vektor hajlásszögének cosinusa, két vektor merőlegessége, egy vektor előjeles vetülete stb. mint a skaláris (belső) szorzattal származtatott fogalmak, *mind az* E_n *tér egy tetszőleges, de rögzített* B_n *bázisára vonatkoznak*, a skaláris szorzat (II° 1'-ben tárgyalt) bázisvarianciájának megfelelően.

IV°. ORTONORMÁLT BÁZISOK. 1'. Az L_n l. térben nincs jelentősége a bázisválasztás mikéntjének; valamennyi bázis egyenlő jogosultsággal rendelkezik. Az E_n valós eu. térben viszont találhatók olyan, ún. ortonormált bázisok, amelyek használata különösen előnyös; szerepük a $B_3 = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\} \in E_3$, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0$, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$ derékszögű egységvektor-hármaséhoz hasonló. Az ilyen bázisok fogalmát készíti elő az alábbi

definíció: *Az* E_n *valós euklidesi tér* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ $(r \leqq n)$ *vektor-r-eséről azt mondjuk, hogy ortogonális vektorrendszert képez, ha e vektorok páronként ortogonálisak, azaz*

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, \ldots, r).$$

Ha ezenkívül az $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ *vektorok egyenként még normált (egység-) vektorok is, azaz*

$$\boldsymbol{e}_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

akkor ezt, az egyébként normált, páronként ortogonális vektorokból álló, tehát együttesen

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

sajátságú vektor-r-est (rövidített műszóval) o r t o n o r m á l t vektorrendszernek nevezzük.

Megjegyzendő, hogy a fentebbi skaláris (belső) szorzatok s így a vektorok ortonormáltsága is az E_n tér egy tetszőleges, de rögzített B_n bázisára vonatkoznak. A skaláris (belső) szorzat bázisvarianciájának kérdésére egyébként rövidesen (a 4′-ben) viszszatérünk.

2′. Kézenfekvő a kérdés, hogy az E_n tér valamely ortonormált vektor-r-ese vajon bázisa-e valamely $E_n^{(r)}$ alterének ($r < n$), ill. magának az E_n térnek ($r = n$). Erre válaszol, egyszersmind az ortonormált bázis fogalmához vezet az alábbi

tétel: *A valós E_n tér bármely*

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r; \quad r \leqq n, \quad \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

ortonormált vektor-r-ese l i n e á r i s a n f ü g g e t l e n vektorokból áll, s mint ilyen, az általa generált $E_n^{(r)}$ altérnek ($r < n$), ill. magának az E_n térnek ($r = n$) egy bázisát képezi.

Ui. l. fs esetén találhatók lennének olyan, nem csupa zérus α_i számok, amelyekkel

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_r\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0}$$

lenne. Pl. $\alpha_1 \neq 0$ feltevéssel élve és $\boldsymbol{e}_1$-gyel skalárisan megszorozva az egyl-et, az $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_i = \delta_{1i}$ ortonormáltság folytán az $\alpha_1 = 0$ eredményre jutnánk, ami ellentmondana az előbbi feltevésnek, vagyis vektorrsz-ünk valóban l. ftl.

A l. ftl-nek bizonyult ortonormált $\boldsymbol{e}_i$ vektorok r száma nyilván nem lehet nagyobb az E_n tér dimenziószámánál, továbbá e l. ftl vektor-r-es az $r < n$ esetben említett $E_n^{(r)}$ altérnek, az $r = n$ határesetben pedig magának az E_n térnek egy bázisát alkotja, q. e. d.

1. Pl. A rendezett valós szám-n-esek $\mathbf{L}_n$ l. terében egy tetszőleges $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ bázisnak magára a B_n-re vonatkozólag nyilván

$$\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij}) = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{n}{0}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

koordinátájú bázisvektorai a szorosabb értelemben vett E_n térben

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = (\delta_{ki})(\delta_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki}\delta_{kj} = \delta_{ij}$$

sajátságúak, azaz magára a B_n-re nézve ortonormált, röviden önortonormált bázist alkalmaznak. A tágabb értelemben vett E_n térben azonban az $\boldsymbol{e}_l$ bázisvektorok (egy alkalmas $\mathbf{C} = [c_{il}]$ matrixszal)

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\delta_{ji}\delta_{kl} = c_{il}$$

sajátságúak, azaz önortonormált bázist csak akkor alkotnak, ha

$$c_{il} = \delta_{il}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{C} = [c_{il}] = [\delta_{il}] = \mathbf{E},$$

vagyis ha a $\mathbf{C}$ matrix éppen az $\mathbf{E}$ egységmatrixszal egyenlő; ez esetben viszont a kétféle skaláris (belső) szorzás s így a szorosabb és a tágabb értelemben vett E_n tér is megegyezik egymással.

3′. Mint már említettük, a

$$B_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset E_n, \quad e_i e_j = \delta_{ij}$$

ortonormált bázisú

$$E_n = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n\}, \quad x_i \in K_v$$

valós euklidesi térben *előnyösen* végezhetők a különféle vizsgálatok. Pl. a B_n-re vonatkoztatva

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \quad q = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$$

báziselőállítással rendelkező *két vektor skaláris* (belső) *szorzata* — az $e_i e_j = \delta_{ij}$ következtében —

$$rq = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

vagyis *a megfelelő koordináták szorzatainak összege.* Ugyanilyen alakban értelmeztük az I° 3′-ben (ott még ortonormált bázis igénybevétele nélkül) az $r = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és a $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektor skaláris szorzatát, megmutatva, hogy ez az értelmezés eleget tesz az I° 2′-beli a)—d) axiómáknak.

Előnyösen egyszerű egy vektor ortonormált bázisra vonatkozó koordinátáinak geometriai jelentése. Ha ugyanis az $r \in E_n$ vektor fentebbi báziselőállítását skalárisan megszorozzuk az ortonormált B_n bázis e_i vektorával, akkor az

$$re_i = \sum_{i=1}^{n} x_k(e_i e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_j \delta_{ij} = x_i = r_i = 0$$

eredményt kapjuk, vagyis — a III° 2′-vel összhangban — az $r \in E_n$ vektornak az *ortonormált B_n bázisra vonatkozó x_i koordinátái éppen az $e_i \in B_n$ bázisvektorokra vonatkozó előjeles vetületeivel* azonosak. Ellenőrizhető, hogy a nem ortonormált bázisra vonatkozó vektorkoordinátákra e megállapítás nem érvényes.

4′. Kedvezően alakul továbbá az E_n térben a *skaláris (belső) szorzat transzformálása* egy ortonormált bázisról (pl. egy tetszőleges, de rögzített B_n alapbázisról, amely mindig önortonormált)* egy másik (a B_n-re nézve szintén) ortonormált bázisra (pl. a B_n'-re). Ugyanis a *β)* VI° 2′ és a *γ)* II° 1′ felhasználásával írható, hogy

$$rq = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j' y_k',$$

ahol

$$c_{jk} = c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik};$$

ez utóbbi a B_n ortonormáltsága ($e_i e_l = \delta_{il}$) folytán

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} a_{lk} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l\right) = e_j' e_k'$$

módon alakítható át, a B_n' ortonormáltsága ($e_j' e_k' = \delta_{jk}$) folytán pedig

$$c_{jk} = e_j' e_k' = \delta_{jk}$$

---

* L. a fentebbi 1. példát!

értéket vesz fel. Ily módon

$$rq = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} x'_i y'_k = \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_j .$$

Észlelhetjük tehát, hogy a valós E_n térben a skaláris (belső) szorzat invariáns az alapul vett (s így önortonormált) bázisról egy (reá nézve) ortonormált bázisra való áttéréssel szemben; más szóval szorzatunk értéke független attól, hogy képzésére az (alapbázisra nézve) ortonormált bázisok közül melyiket választjuk; ezek szorzatunk szempontjából egyenértékűek.

V°. ORTOGONALITÁSI KÉRDÉSEK. 1'. Legyen $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ ($r \leqq n$) a valós E_n egy *tetszőleges, l. ftl vektorrsz-e,* amely nem ortonormált a $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ alapbázisra nézve, azaz $\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j \neq \delta_{ij}$. E l. ftl vektor-$r$-es nyilván egy *bázisa* az $E_n^{(r)} = \{\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r\}$ altérnek ($r = n$ esetén magának az E_n térnek). Előfordul, hogy e vektor-r-esből — alkalmas l. ko-val — egy (a B_n-re nézve) *ortonormált bázist,* vagyis egy $\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{b}_j = \delta_{ij}$ sajátságú $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ vektor-r-est *kell szerkeszteni az $E_n^{(r)}$ (ill. az E_n) részére.* E feladatot oldja meg az alábbi *Schmidt-féle o r t o g o n a l i z á l á s i e l j á r á s.*

A $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$ választásból kiindulva, a többi $\boldsymbol{b}_k$ bázisvektort

$$\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k + \lambda_{k-1}^{(k)} \boldsymbol{b}_{k-1} + \ldots + \lambda_2^{(k)} \boldsymbol{b}_2 + \lambda_1^{(k)} \boldsymbol{b}_1 \qquad (k = 2, 3, \ldots, r)$$

alakban, vagyis az előző $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1}$ bázisvektorok és az $\boldsymbol{a}_k$ vektor l. ko-jaként keressük, mégpedig azon feltétellel, hogy bármely $\boldsymbol{b}_k$ vektor az előző $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1}$ vektorokra ortogonális, azaz

$$\boldsymbol{b}_l \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{b}_l \boldsymbol{a}_k + \lambda_{k-1}^{(k)} \boldsymbol{b}_l \boldsymbol{b}_{k-1} + \ldots + \lambda_l^{(k)} \boldsymbol{b}_l + \ldots + \lambda_2^{(k)} \boldsymbol{b}_l \boldsymbol{b}_2 + \lambda_1^{(k)} \boldsymbol{b}_l \boldsymbol{b}_1 =$$
$$= \boldsymbol{b}_l \boldsymbol{a}_k + \lambda_l^{(k)} \boldsymbol{b}_l^2 = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k-1;\ k = 2, 3, \ldots, r)$$

legyen. Ezen ortogonalitási egyenletekből az eddig ismeretlen $\lambda_l^{(k)}$ együtthatókra nyilván a

$$\lambda_l^{(k)} = -\frac{\boldsymbol{a}_k \boldsymbol{b}_l}{\boldsymbol{b}_l^2} \qquad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ k = 2, 3, \ldots, r \end{pmatrix}$$

értékek adódnak. E formula láthatóan csak akkor használható, ha valamennyi $\boldsymbol{b}_l^2 \neq 0$, azaz $\boldsymbol{b}_l \neq \boldsymbol{0}$. E követelmény teljesülését éppen az adott $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ vektorrsz l. ftls-e biztosítja. Ha ui. a $\boldsymbol{b}_k$ formulájába egymás után behelyettesítjük a $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1}$ vektorokat, mind rendre az $\boldsymbol{a}_1$; $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$; $\ldots$; $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ vektorok l. ko-it, akkor az így nyert

$$\boldsymbol{b}_k = \beta_k \boldsymbol{a}_k + \beta_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + \ldots + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_1 \boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0} \qquad (\beta_k = 1),$$

tekintettel az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ l. ftls-ére és a $\beta_k = 1$ körülményre.

A vázolt ortogonalizálási eljárást addig folytatjuk, amíg az adott $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ vektorok valamennyien el nem fogynak. Az utolsó lépésben a $\boldsymbol{b}_r$ vektort kapjuk, az $\boldsymbol{a}_r$ és a már előbb meghatározott $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{r-1}$ vektorok rendre 1, ill. $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \ldots, \lambda_{r-1}^{(r)}$ együtthatós l. ko-jaként. Ily módon összesen r darab, a $\boldsymbol{0}$-tól különböző és páronként ortogonális vektort nyerünk.

Ha ezeket még az ismert

$$\boldsymbol{b}_k^0 = \frac{\boldsymbol{b}_k}{|\boldsymbol{b}_k|} = \frac{\boldsymbol{b}_k}{\sqrt{\boldsymbol{b}_k^2}} = \frac{\boldsymbol{b}_k}{\sqrt{N(\boldsymbol{b}_k)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

módon normáljuk, akkor — a 2'-beli tétel értelmében — valóban az $E_n^{(r)}$ altér ($r = n$ esetén pedig az E_n tér) egy ortonormált bázishoz jutunk, q. e. d.

1. Pl. Legyen adva az E_4 térben az

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 2, 3), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

vektornégyes. E vektorrsz 1. ftl, mert — szerkezeténél fogva — nyilván egyik vektor sem állítható elő a másik három l. ko-jaként. E vektorrsz továbbá láthatóan nem ortonormált az $\boldsymbol{e}_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{4i}) \in B_4$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ alapbázisra nézve. Szerkesszünk e vektornégyesből egy (a B_4-re nézve) ortonormált bázist az E_4 számára, az előbb ismertetett eljárással.

A páronként ortogonális $\boldsymbol{b}_k$ vektorok így adódnak:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3, 4); \qquad \lambda_1^{(2)} = -\frac{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1^2} = -\frac{20}{30} = -\frac{2}{3},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \lambda_1^{(2)}\boldsymbol{b}_1 = (0, 1, 2, 3) - \frac{2}{3}(1, 2, 3, 4) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right);$$

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{a}_1^2} = -\frac{11}{30}, \qquad \lambda_2^{(3)} = -\frac{\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2^2} = -\frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{9}} = -1,$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \lambda_2^{(3)}\boldsymbol{b}_2 = \lambda_1^{(3)}\boldsymbol{b}_1 = (0, 0, 1, 2) - \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) - \frac{11}{30}(1, 2, 3, 4) =$$

$$= \left(\frac{9}{30}, -\frac{12}{30}, -\frac{3}{30}, \frac{6}{30}\right);$$

$$\lambda_1^{(4)} = \frac{\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1^2} = -\frac{4}{30}, \qquad \lambda_2^{(4)} = -\frac{\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2^2} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{9}} = -\frac{1}{2},$$

$$\lambda_3^{(4)} = -\frac{\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{b}_3}{\boldsymbol{b}_3^2} = -\frac{\frac{6}{30}}{\frac{270}{900}} = -\frac{2}{3},$$

$$\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 + \lambda_3^{(4)}\boldsymbol{b}_3 + \lambda_2^{(4)}\boldsymbol{b}_2 + \lambda_1^{(4)}\boldsymbol{b}_1 = (0, 0, 0, 1) - \frac{2}{3}\left(\frac{9}{30}, -\frac{12}{30}, -\frac{3}{30}, \frac{6}{30}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{30}(1, 2, 3, 4) = \left(0, \frac{5}{30}, -\frac{10}{30}, \frac{5}{30}\right).$$

A keresett ortonormált bázis tehát így alakul:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, 4), \qquad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 0, 1), \qquad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{30}}(3, -4, -1, 2)$$

$$\boldsymbol{b}_4^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1).$$

2'. Tárgyaljuk most egy tetszőleges (véges vagy végtelen) dimenziójú E valós eu. térben valamely $\boldsymbol{h} \in E$ *vektor (pont) ortogonális vetítését* egy olyan

$$E^{(m)} = \{\varrho\} = \{\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{a}_m\} \subset E \qquad (\alpha_k \in K_v)$$

altérre, amelynek $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ generáló vektorrsz-e l. ftl, s így $E^{(m)}$ egyik (a rögzített $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_m, \ldots\}$ bázisra nézve rendszerint nem ortonormált) $B^{(m)}$ bázisát képezi.

A $\boldsymbol{h} \perp E^{(m)}$ ortogonalitást értelmezi az alábbi

definició: *A $\boldsymbol{h} \in E$ vektort akkor mondjuk az $E^{(m)} \subset E$ altérre ortogonálisnak és jelöljük $\boldsymbol{h} \perp E^{(m)}$ módon, ha $\boldsymbol{h}$ bármely $\varrho \in E$ vektorra ortogonális.*

A $\boldsymbol{h} \perp E^{(m)}$ ortogonalitásra feltételt ad a következő

tétel: *A $\boldsymbol{h} \perp E^{(m)}$ ortogonalitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\boldsymbol{h}$ ortogonális legyen az $E^{(m)}$ egy tetszőleges bázisára.*

Ui. — célszerűen az $E^{(m)}$ altér $B^{(m)} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ generáló bázisával dolgozva — a $\boldsymbol{h} \perp E^{(m)}$:

$$\boldsymbol{h}\varrho = \boldsymbol{h}(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{a}_m) = \alpha_1(\boldsymbol{h}\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{h}\boldsymbol{a}_2) + \ldots + \alpha_m(\boldsymbol{h}\boldsymbol{a}_m) = 0$$

követelmény teljesüléséhez nyilván elegendő a $\boldsymbol{h} \perp B^{(m)}$:

$$\boldsymbol{h}\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{h}\boldsymbol{a}_2 = \ldots = \boldsymbol{h}\boldsymbol{a}_m = 0$$

feltételi egyl-ek teljesülése. A $\boldsymbol{h} \perp B^{(m)}$ feltétel egyszersmind szükséges is, mert m-nél kevesebb l. ftl $\boldsymbol{a}_i$ vektorral nem lehet előállítani az egész $E^{(m)}$ alteret.

— Ezek után igazolásra kerül az alábbi, következményeiben nagy jelentőségű kettős

tétel: a) *Az E tér egy adott $\boldsymbol{r} \notin E^{(m)}$ pontja és az $E^{(m)} = \{\varrho\} \subset E$ altér között húzódó $(\boldsymbol{r} - \varrho)$ transzverzálisok közül a $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{r} - \varrho_0) \perp E^{(m)}$ ortogonális transzverzális a legrövidebb, s így hossza az $\boldsymbol{r}$ pont és az $E^{(m)}$ altér távolságának tekinthető, azaz*

$$|\boldsymbol{h}| = |\boldsymbol{r} - \varrho_0| = \operatorname{Min} |\boldsymbol{r} - \varrho| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{r}, E^{(m)}).$$

b) *A $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} - \varrho_0$ ortogonális transzverzális $\varrho_0 \in E^{(m)}$ talppontja az adott $\boldsymbol{r}$ vektorból és az alteret generáló $\boldsymbol{a}_k$ bázisvektorokból a*

$$\varrho_0 \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldásaként nyerhető.

ad a) Ui. $\varrho, \varrho_0 \in E^{(m)}$ lévén, $(\varrho_0 - \varrho) \in E^{(m)}$ szintén (mert az altér maga is l. tér), s így $(\varrho_0 - \varrho) \perp (\boldsymbol{r} - \varrho_0) = \boldsymbol{h}$; a *Pythagoras*-tétel szerint tehát

$$|\varrho_0 - \varrho|^2 + |\boldsymbol{h}|^2 = |(\varrho_0 - \varrho) + \boldsymbol{h}|^2 = |\varrho_0 - \varrho + \boldsymbol{r} - \varrho_0|^2 = |\boldsymbol{r} - \varrho|^2,$$

következésképpen

$$|\boldsymbol{h}| = |\boldsymbol{r} - \varrho_0| < |\boldsymbol{r} - \varrho|, \qquad \text{q. e. d.}$$

ad b) Ui. a $\varrho_0 \in E^{(m)}$ vektort (pontot), mely az $\boldsymbol{r}$ vektor (pont) ún. ortogonális vetülete a $E^{(m)}$ altéren, nyilván

$$\varrho_0 = \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_m \boldsymbol{a}_m, \qquad \beta_k = ?$$

alakban keressük, mégpedig ésszerűen a $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{r} - \varrho_0) \perp E^{(m)}$ ortogonalitást biztosító $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{r} - \varrho_0) \perp B^{(m)} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$:

$$(\boldsymbol{r} - \varrho_0)\boldsymbol{a}_k = 0, \quad \text{azaz}$$

$$\varrho_0\boldsymbol{a}_k = \beta_1(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k) + \ldots + \beta_k\boldsymbol{a}_k^2 + \ldots + \beta_m(\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{a}_k) = \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

feltételi egylrsz alapján.

Különösen egyszerűen alakul a l. inhomogén egylrsz, ha *a* $B^{(m)}$ *bázis ortonormált*, vagyis $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$ tulajdonságú; ekkor ugyanis egylrsz-ünk

$$\beta_k = \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

alakot ölt, amely közvetlenül megadja a $\varrho_0 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ megoldást. Minthogy pedig az $E^{(m)}$ altérben (az 1'-ben ismertetett módon) mindig szerkeszthető ortonormált bázis, ezzel beigazolódott, hogy a $\varrho_0 \in E^{(m)}$ vetület valóban létezik, sőt egyértelműen meghatározott.

Feltételi egylrsz-ünk *tetszőleges* $B^{(n)}$ *bázis* esetén is egyértelműen megoldható, mert ϱ_0 egy és csakis egy van, ez a tetszőleges $B^{(n)}$ bázisra vonatkozólag is egyértelmű β_k koordinátákkal rendelkezik, és ezek éppen egylrsz-ünk megoldását szolgáltatják.

Következésképpen egylrsz-ünk determinánsa, az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorok ún. *Gramm*-féle determinánsa zérustól különböző értékű, azaz

$$G = \det(g_{kl}) = \det(\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_l) = \det(\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{a}_k) = \det(g_{lk}) \neq 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

L. inhomogén egylrsz-ünk tehát reguláris, s mint ilyen, pl. a *CRAMER*-szabállyal egyértelműen megoldható. Ezzel a kettős tételt teljes egészében igazoltuk.

Jegyezzük meg végül, hogy $m = \dim[E^{(m)}] \to \dim(E)$ esetén $E^{(m)} \to E$, és ellenőrizhetően $\varrho_0 \to \boldsymbol{r}$, tehát

$$|\boldsymbol{h}|^2 = (\boldsymbol{r} - \varrho_0)^2 = (\boldsymbol{r} - \beta_1\boldsymbol{a}_1 - \ldots - \beta_n\boldsymbol{a}_m)^2 = \sum_i (x_i - \beta_1 a_{i1} - \ldots - \beta_m a_{im})^2 =$$

$$= \operatorname{Min}(\boldsymbol{r} - \varrho)^2 = (\boldsymbol{r} - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \ldots - \alpha_m\boldsymbol{a}_m)^2 = \operatorname{Min}\sum_i (x_i - \alpha_1 a_{i1} - \ldots - \alpha_m a_{im})^2 \to 0.$$

E formulák egyébként jól szemléltetik a pont és altér távolságának valamint az ún. *legkisebb (hiba-)négyzetek elvének* szoros kapcsolatát.

2. Pl. Határozzuk meg az $\boldsymbol{r} = (7, 2, 3, 10) \in E_4$ pontból a

$$B_4^{(3)} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, 4), \qquad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 0, 1), \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(3, -4, -1, 2)$$

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{a}_1^2 = \boldsymbol{a}_2^2 = \boldsymbol{a}_3^2 = 1$$

ortonormált bázissal generált

$$E_4^{(3)} = \{\varrho\} = \{\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3\}$$

altérhez vont ortogonális transzverzális ϱ_0 talppontját és $|\boldsymbol{h}| = |\boldsymbol{r} - \varrho_0|$ hosszát, vagyis az $\boldsymbol{r}$ és az $E_4^{(3)}$ távolságát. —

Az imént tanultak szerint a

$$\varrho_0 = \beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \beta_3\boldsymbol{a}_3 \in E_4^{(3)}$$

talppontnak a $B_4^{(3)}$ bázisra vonatkozó β_k koordinátái

$$\beta_1 = \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_1 = \frac{60}{\sqrt{30}} = 2\sqrt{30}, \qquad \beta_2 = \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_2 = -\frac{6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6},$$

$$\beta_3 = \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_3 = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}$$

módon nyerhetők, és ezekkel a ϱ_0 vetületvektor (talppont) az E_4 tér B_4 bázisára vonatkozólag

$$\varrho_0 = 2 \cdot (1, 2, 3, 4) - 1 \cdot (-2, -1, 0, 1) + 1 \cdot (3, -4, -1, 2) = (7, 1, 5, 9)$$

alakban jelentkezik. Az ortogonális transzverzális tehát

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} - \varrho_0 = (7, 2, 3, 10) - (7, 1, 5, 9) = (0, 1, -2, 1),$$

hossza, vagyis az $\boldsymbol{r}$ és az $E_4^{(3)}$ távolsága pedig

$$|\boldsymbol{h}| = \text{dist}\,(\boldsymbol{r}, E_4^{(3)}) = \sqrt{6}.$$

3'. Itt teszünk rövid említést a különféle (pl. szám-n-es vagy polinom, vagy függvény stb. elemű) E_n, $\hat{E}_n$, ... terek bizonyos *rokonságáról*, az ún. izomorfizmusról. Ezt értelmezi az alábbi

definíció: *Az $E = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \ldots\}$ és az $\hat{E} = \{\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{q}}, \ldots\}$ valós euklidesi teret (egymáshoz) izomorfnak nevezzük, ha elemeik között olyan kölcsönösen egyértelmű kapcsolat ($\leftrightarrow$) van, hogy $\boldsymbol{r} \leftrightarrow \boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{q} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ esetén*

$$(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{q}}), \qquad (\lambda\boldsymbol{r}) \leftrightarrow (\lambda\hat{\boldsymbol{r}}), \qquad (\boldsymbol{r}\boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{q}}).$$

Ily módon az E térben fennálló (s e három művelettel kifejezhető) *tételek* minden, hozzá izomorf $\hat{E}$ térben is érvényben maradnak.

Az izomorfizmusra feltételt ad az alább (igazolás* nélkül) következő

tétel: *Az összes n-dimenziós valós euklidesi tér (E_n, $\hat{E}_n$, ...) izomorf (egymáshoz).*

Eszerint pl. a rendezett *valós szám-n-esek* $E_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(x_i \in K_v)$ teréhez minden másfajta $\hat{E}_n$ izomorf. Ez utóbbiakról egyébként éppen a következő pontban olvashatunk.

Tételünkből következik továbbá, hogy pl. az irányított egyenesdarabok $E_3 = \{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \ldots\}$ térben fennálló (s a három művelettel kifejezhető) *tételek* minden másfajta $\hat{E}_3$ térben, sőt $\hat{E}_n^{(3)}$ altérben is igazak maradnak, lévén mind e terek és alterek — dimenziójuk egyezése folytán — egymáshoz izomorfok.

* *VI°. KÜLÖNFÉLE EUKLIDESI (ÉS EGYÉB) TEREK.* 1'. Az I° — V° pontokban megadtuk a valós E_n térnek és számos fogalmának (pl. a normának, az ortogonalitásnak, az ortonormáltságnak, az altérre való vetítésnek stb.) általános (tehát bármilyen fajta valós E_n térre érvényes) definícióját. Ezekkel kapcsolatban több, ugyancsak általános tételt is tárgyaltunk. E jelentékeny *általános definíció — és tételanyagot* azonban — könyvünk főcéljának megfelelően — *eddig csupán a rendezett valós szám-n-esek* $E_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots\}$ *terével szemléltettük.* Ez volt egyébként didaktikailag is a legtermészetesebb út, az $\hat{E}_3 = \{\overrightarrow{OP}, \ldots\}$ és a vele izomorf $E_3 = \{(x, y, z), \ldots\}$ térrel kapcsola-

* L. pl. *Gelfand* [2] 35. o.

tos számottevő előismeretek birtokában. A valós E_n tér jelentőségéről azonban csak akkor alkothatunk helyes képet, ha *pótlólag egy-két másfajta, nem szám-n-es elemű eu. térrel is megismerkedünk.* Erre kerül sor az alábbiakban.

2'. Tekintsük *az* $[a, b]$ *zárt szakaszon folytonos valós függvények* $H = \{f(t), g(t), \ldots\}$ összességét! E halmazban már korábban értelmeztük a kívánt axiómáknak eleget tevő összeadást és számmal való szorzást, továbbá észleltük, hogy akárhány l. ftl található benne, pl. $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, \ldots, f_n(t) = t^n, \ldots$; így jutottunk el az előzőkben *a végtelen dimenziós*

$$L_\infty = \{f(t), g(t), \ldots\}, \qquad B_\infty = \{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$$

l. függvénytérnek és egy bázisának ismeretéig.

Fejlesszük most e l. teret valós eu. térré, mégpedig a skaláris (belső) szorzat

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

értelmezésével, amely — ellenőrizhetően — eleget tesz az a)—c) axiómáknak, sőt a d)-nek is, lévén a norma

$$N(f) = \int_a^b f^2(t)\, dt > 0, \quad \text{ha} \quad f(t) \not\equiv 0 \quad \text{és} \quad N(f) = \int_a^b 0\, dt = 0, \quad \text{ha} \quad f(t) \equiv 0.$$

Ezzel az $[a, b]$ zárt szakaszon folytonos valós-függvények *végtelen dimenziós*

$$E_\infty = \{f(t), g(t), \ldots\}$$

eu. függvényteréhez jutunk el.

1. Pl. Írjuk fel a szóban forgó E_∞ tér $E_\infty^{(2)} = \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}$ alterében az ún. *három-szög-relációt!* — A III° 2'-beli 4. példában tanultak értelmében nyilván írható, hogy

$$\sqrt{\int_a^b [f(t) + g(t)]^2\, dt} \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}.$$

3'. Tekintsük ezután a szóban forgó E_∞ térnek a

$$\hat{B}_\infty^{(2n+1)} = \{a_i(t)\} = \{1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt, \sin t, \sin 2t, \ldots, \sin nt\}$$

bázissal generált, $(2n + 1)$ *dimenziós*

$$E_\infty^{(2n+1)} = \{\varphi(t)\} = \left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right\} \qquad (a_0, a_k, b_k, \in K_v)$$

alterét. Ez nyilván mindenütt folytonos és $T = 2\pi$*-vel periodikus függvényeket* ölel fel, s ezért elegendő lesz ezeket valamely $b - a = 2\pi$ hosszúságú (pl. a $[a, a + 2\pi]$) szakaszon vizsgálni. Lássuk most a $\hat{B}_\infty^{(2n+1)}$ bázissal foglalkozó alábbi példákat.

2. Pl. Igazolandó, hogy az előbb említett $\hat{B}_\infty^{(2n+1)}$ *bázis ortogonális.* — Elemi integrálszámítási eszközökkel ellenőrizhetők az alábbi ortogonalitási relációk:

$$(a_0, a_k) = \int_{(2\pi)} 1 \cdot \cos kt\, dt = 0, \qquad (a_0, a_{n+k}) = \int_{(2\pi)} 1 \cdot \sin kt\, dt = 0,$$

$$(a_k, a_m) = \int_{(2\pi)} \cos kt \cos mt\, dt = 0 \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(a_{n+k}, a_{n+m}) = \int_{(2\pi)} \sin kt \sin mt\, dt = 0. \qquad (a_k, a_{n+m}) = \int_{(2\pi)} \cos kt \sin mt\, dt = 0.$$

3. Pl. Normáljuk ezt a $\hat{B}_\infty^{(2n+1)}$ ortogonális bázist! — Figyelembe véve e bázis függvényeinek

$$N(a_0) = \int_{(2\pi)} 1 \cdot dt = 2\pi, \quad N(a_k) = \int_{(2\pi)} \cos^2 kt\, dt = \pi, \quad N(a_{n+k}) = \int_{(2\pi)} \sin^2 kt\, dt = \pi$$

normáit, az *ortonormált bázis* nyilván így alakul:

$$B_\infty^{(2n+1)} = \{e_l(t)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\right\}.$$

— Legyen $f(t)$ *a továbbiakban* $T = 2\pi$*-vel periodikus és valamely* $[a, a + 2\pi]$ *szakaszon* — az egyszerűség kedvéért — *folytonos* valós függvény s mint ilyen egy eleme a fentebb említett E_∞ eu. térnek. Keressünk most az imént vizsgált $E_\infty^{(2n+1)}$ *altérben* olyan $\varphi_0(t)$ függvényt (trigonometrikus polinomot), hogy az az adott $f(t)$ függvénytől minél kevésbé térjen el. *Az eltérés mértékének,* egyszersmind a $\varphi_0(t)$ ismeretlen együtthatói (a_0^*, a_k^*, b_k^*) meghatározására alkalmas alapelvnek a (tetszőleges $b - a = 2\pi$ hosszúságú szakaszon vett)

$$\min H_n = \min N(f - \varphi) = \min \int_{(2\pi)} [f(t) - \varphi(t)]^2\, dt =$$

$$= h_n = N(f - \varphi_0) = \int_{(2\pi)} [f(t) - \varphi_0(t)]^2\, dt = \operatorname{dist}^2 (f, E_\infty^{(2n+1)})$$

ún. *legkisebb hibanégyzet-integrált* (minimális kvadratikus eltérést) tekintjük ez térelméletileg az $f(t) \in E_\infty$ pont és a $\varphi(t) \in E_\infty^{(2n+1)} \subset E_\infty$ altér $f(t) - \varphi(t)$ transzverzálisai legrövidebbikének, az $f(t) - \varphi_0(t)$ ortogonális transzverzálisának hossznégyzetét, normáját, s mint ilyen, az $f(t) \in E_\infty$ *pont és az* $E_\infty^{(2n+1)} \subset E_\infty$ *altér távolságnégyzetét* jelenti. Feladatunk ezek után az $f(t)$ függvényt a vizsgált szakaszon a legkisebb hibanégyzetintegrállal közelítő $\varphi_0(t)$ függvénynek, térelméletileg *az* $f(t) \in E_\infty$ *pont* $E_\infty^{(2n+1)}$ *altérbeli* $\varphi_0(t)$ *ortogonális vegyületének* megállapítása.

4. Pl. Határozzuk meg tehát a $\varphi_0(t)$ függvénynek (pontnak) a $B_\infty^{(2n+1)} = \{e_l(t)\} \subset E_\infty^{(2n+1)}$ ortonormált függvényrendszerre (bázisra) vonatkozó a_0^*, a_k^*, b_k^*, együtthatóit (koordinátáit)! — Ezek — az V°2'-ben anultak szerint — az alábbi egyszerű módon nyerhetők:

$$a_0^* = (f, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(2\pi)} f(t)\, dt, \qquad a_k^* = (f, e_k) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(2\pi)} f(t) \cos kt\, dt,$$

$$b_k^* = (f, e_{n+k}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(2\pi)} f(t) \sin kt\, dt.$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots, n; \quad e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos kt, \quad e_{n+k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin kt\right).$$

Ezek az $f(t)$ *függvény* $\varphi_0(t)$ közelítő trigonometrikus polinomjának ún. *FOURIER-együtthatói,* a $B_\infty^{(2n+1)} = \{e_l(t)\}$ ortonormált függvényrendszerre vonatkozólag. Végeredményben *az* $f(t)$ *függvény közelítő Fourier-polinom-előállítása* a most már előnyösebb $\hat{B}_\infty^{(2n+1)} = \{a_l(t)\}$ ortogonális bázisban így alakul:*

$$f(t) \approx \varphi_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos kt \cdot \int_{(2\pi)} f(\tau) \cos k\tau\, d\tau + \sin kt \int_{(2\pi)} f(\tau) \sin k\tau\, d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} f(\tau) \cos k(t - \tau)\, d\tau.$$

* Célszerű itt az integrálási változót (τ) a függvény független változójától (t) megkülönböztetni.

Igazolható,* hogy $n \to \infty$ (tehát $E_\infty^{(2n+1)} \to E_\infty$) esetén *α)* az a_0^*, a_k^*, b_k^* együtthatók változatlanok maradnak (véglegességi reláció), *β)* $h_n = \min H_n \to 0$, és így

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(2\pi)} f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{(2\pi)} f(\tau) \cos k(t-\tau)\, d\tau,$$

amely az $f(t)$ függvény (végtelen, konvergens) Fourier-sora (teljességi reláció).

4'. Tekintsük ezután az $[a, b]$ szakaszon folytonos valós függvények E_∞ terében *a legfeljebb $(n - 1)$-edfokú polinomok*

$$B_n = B_\infty^{(n)} = \{f_0(t), f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{n-1}(t)\} = \{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$$

bázissal generált n-dimenziós

$$E_n = E_\infty^{(n)} = \{P(t), Q(t), \ldots\} = \{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}\}$$

alterét, célszerűen a szakasz határainak $a = -1$, $b = 1$ választásával s így a skaláris (belső) szorzat

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt$$

alakulásával. Könnyen belátható, hogy a B_n *bázis nem ortogonális,* mert pl.

$$(f_0, f_{2l}) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot t^{2l}\, dt = \left[\frac{t^{2l+1}}{2l+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{2l+1} \neq 0.$$

Ortogonalizálásával, normálásával és egy $P(t) \in E_n$ polinom ortonormált báziselőállításával foglalkoznak az alábbi példák.

5. Pl. Szerkesszünk ortogonális bázist az $E_n = \{P(t), Q(t), \ldots\}$ eu. polinomtér számára, az adott $B_n = \{f_k(t)\} = \{t^k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ alapján. — Az V° 1'-ben tanulmányozott *Schmidt-féle eljárással* — ellenőrizhetően — az alábbi *ortogonális bázispolinomokat* kapjuk:

$$g_0(t) = f_0(t) = 1; \qquad g_1(t) = -\frac{(f_1, g_0)}{(g_0, g_0)} \cdot g_0(t) + f_1(t) = -\frac{\int_{-1}^{1} t\, dt}{\int_{-1}^{1} 1\, dt}\, 1 + t = t;$$

$$g_2(t) = -\frac{(f_2, g_0)}{(g_0, g_0)} \cdot g_0(t) - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1(t) + f_2(t) =$$

$$= -\frac{\int_{-1}^{1} t^2\, dt}{\int_{-1}^{1} 1\, dt} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3\, dt}{\int_{-1}^{1} t^2\, dt} \cdot t + t^2 = -\frac{1}{3} + t^2;$$

továbbá hasonlóan

$$g_3(t) = -\frac{3}{5}\, t + t^3, \qquad g_4(t) = \frac{3}{35} - \frac{6}{7}\, t^2 + t^4, \qquad \text{s i. t.}$$

E $g_k(t)$ polinomokat rendre elosztva a $t = 1$ helyen felvett $[1, 1, 2/3, 8/35, \ldots]$ értékükkel, a nyilván továbbra is ortogonális

$$G_0(t) = 1, \quad G_1(t) = t, \quad G_2(t) = \frac{3}{2}\, t^2 - \frac{1}{2}, \quad G_3(t) = \frac{5}{2}\, t^3 - \frac{3}{2}\, t,$$

$$G_4(t) = \frac{35}{8}\, t^4 - \frac{15}{4}\, t^2 + \frac{3}{8}, \ldots$$

* L. bővebben pl. *Sommerfeld* [10].

polinomokhoz jutunk. Ezek — beláthatóan — azonosak a

$$G_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

formula által származtatott ún. *Legendre*-polinomokkal. Említésre méltó, hogy $G_k(1) = 1$.

6. Pl. Normáljuk a *Legendre*-féle ortogonális polinomokat, majd adjuk meg tetszőleges $P(t) \in E_n$ polinom előállítását az így nyert ortonormált bázisban. — Kimutatható,* hogy e polinomok normája

$$N(G_k) = (G_k, G_k) = \int_{-1}^{1} G_k^2(t)\, dt = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Ily módon az ortonormált *Legendre*-polinomok

$$G_k^*(t) = \frac{G_k(t)}{\sqrt{N(G_k)}} = \frac{\sqrt{k + \frac{1}{2}}}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

alakot öltenek. Végül egy legfeljebb $(n - 1)$-edfokú $P(t) \in E_n$ polinom előállítását a $B_n^* = \{G_k^*(t)\}$ ortonormált bázisban — a 4. példa mintájára és az ottani $\varphi_0(t)$-nek az itteni $P(t)$-1 feleltetve meg — így kapjuk:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k G_k^*(t), \quad \text{ahol} \quad C_k = (P, G_k) = \int_{-1}^{1} P(t) G_k^*(t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

5'. A b) α) I°—VI° pontokban eddig tárgyalt, egyébként különböző természetű E_n eu. terek közös tulajdonsága éppen *valós jellegük* volt. Kíséreljük meg most az eu. teret a komplex számtesten értelmezni, visszaemlékezve arra, hogy ugyanez a törekvésünk a 1. térben semmi gondot nem okozott.

A *komplex euklidesi tér*, $\underset{(z)}{E_n}$ részére az ún. *belső szorzást* a valós E_n tér I° 2'-beli axiómái szerint próbálva értelmezni, észlelhető, hogy a normával kapcsolatos

d) $N(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}^2 > 0$, ha $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ és $N(\boldsymbol{r}) = 0$, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$

axióma nem teljesíthető (a többi igen).

1. Pl. Ha pl. $\boldsymbol{r} = (0, 1, 0, i)$, akkor a (rendezett valós szám-n-esek eu. normájának mintájára képzett) norma

$$N(\boldsymbol{r}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0^2 + (1)^2 + 0^2 + (i)^2 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0, \quad \text{noha} \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}.$$

Sőt, ha $\boldsymbol{r} = (0, i, 0, i)$ akkor a norma

$$N(\boldsymbol{r}) = 0 - 1 + 0 - 1 = -2 < 0.$$

2. Pl. Ha pl. $f(t) = t^3 + it^2$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$, akkor a (folytonos valós függvények eu. normájának mintájára képzett) norma

$$N(f) = (f, f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (t^3 + it^2)^2\, dt = -\frac{4}{35} < 0. \; -$$

Az E_z komplex eu. tér — e normálási problémája miatt — kevéssé alkalmas n dimenziós geometriai vizsgálatra. E nehézség kiküszöbölése céljából — az iménti belső szorzás

* L. pl. *Sommerfeld* [10].

helyett — az ún. *skaláris szorzást* értelmezzük, az alábbi *axiómákkal:*

a) $r\bar{q} = \overline{q\bar{r}}$, b) $(\alpha r)\bar{q} = \alpha(r\bar{q})$, c) $r(\bar{q} + \bar{p}) = r\bar{q} + r\bar{p}$, d) $N(r) = r\bar{r} > 0$, ha $r \neq 0$

s $N(r) = 0$, ha $r = 0$; $L_n = \{r, q, p, \dots \bar{r}, \bar{q}, \bar{p}, \dots\}$, $\alpha \in K_z$.

E skaláris szorzással ellátott L_n komplex l. teret h e r m i t e i t é r nek nevezzük; jelölése H_n.

Lássunk most példa formájában egy-két konkrét hermitei teret!

3. Pl. *A rendezett komplex szám-n-esek*

$$H_n = \{r, q, \dots, \bar{r}, \bar{q}, \dots\} =$$

$$= \{(z_1, z_2, \dots, z_n), (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \dots, (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n), (\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_n), \dots\},$$

hermitei terében pl.

a skaláris szorzat: $r\bar{q} = z_1\bar{\zeta}_1 + z_2\bar{\zeta}_2 + \dots + z_n\bar{\zeta}_n$,

a (hermitei) norma: $N(r) = r\bar{r} = z_1\bar{z}_1 + \dots + z_n\bar{z}_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$,

az előbbi a)—d) axiómák nyilvánvaló teljesülésével; továbbá

az $r \perp q$ ortogonalitás: $r\bar{q} = 0$,

egy ortonormált bázis: $\underset{(h)}{B_n} = \{e_1, \dots, e_n;\ e_i\bar{e}_j = \delta_{ij}\}$,

egy reá vonatkozó koordináta: $r\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} z_i(e_i\bar{e}_j) = z_j$.

4. Pl. *Az $[a, b]$ szakaszon folytonos (valós változós) komplex függvények*

$$H_n = \{f(t), g(t), \dots, \bar{f}(t), \bar{g}(t), \dots\}$$

hermitei terében pl. (a kívánt axiómák teljesülésével)

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)\,dt, \qquad N(f) = (f, \bar{f}) = \int_a^b f(t)\bar{f}(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|^2\,dt;$$

az $f_1(t), \dots, f_n(t)$ függvényrész ortonormált, ha $(f_i, \bar{f}_j) = \int_a^b f_i(t)\bar{f}_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.

A különféle valós E_n terekben tárgyalt *feladatok* — értelemszerűen — a megfelelő komplex H_n terekre is *általánosíthatók.**

Végül kiemeljük, hogy *a valós E_n tér a komplex $\underset{(z)}{E_n}$ tér és a komplex H_n tér közös speciális esetének tekinthető* (ti. Im r = Im q = ... = 0, Re $r = r$, Re $q = q$, ... esetének)! Nyilván ezért illethettük az előzőkben a valós E_n térbeli rq szorzást akár *belső*, akár *skaláris* jelzővel.

b) Lineáris egyenletrendszerek **

I°. REGULÁRIS EGYENLETRENDSZEREK. 1'. *A lineáris algebrai egyenletrendszerek általános alakja — skaláris írásmóddal —* tudvalevőleg

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}\right\}, \quad (a_{ij}, b_i, x_i \in K_v) \qquad \text{(A)}$$

---

* L. bővebben *Gelfand* [2] 8. §.

** L. még a C. VII. kt. 1. §-ban!

ahol nyilván n az egyl-ek, m az ismeretlenek (nem szükségképpen megegyező) száma, továbbá az a_{ij}, b_i állandók és az x_i ismeretlenek egyaránt valós számok.

Egyl-ünk *az* E_m *valós eu. térben értelmezett*

$$F_i(\boldsymbol{r}) \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j =$$
$$= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \boldsymbol{a}^i\boldsymbol{r}$$

l. formák igénybevételével is felírható, nevezetesen

$$F_i(\boldsymbol{r}) \equiv (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \boldsymbol{a}^i\boldsymbol{r} = b_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \ \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{r} \in E_m, \ b_i \in K_v)$$

alakban.

Egylrsz-ünk még gyakrabban *az* L_n *valós l. térben értelmezett*

$$\boldsymbol{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}), \qquad \boldsymbol{b} = b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

vektorok segítségével kerül felírásra, mégpedig

$$L(\boldsymbol{r}) = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_m\boldsymbol{a}_m = \sum_{j=1}^{m} x_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b} \in L_n, \ x_j \in K_v). \qquad \text{(C)}$$

Végül megemlítjük, hogy az

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) \qquad (\boldsymbol{a}_j \in L_n)$$

matrix, mint vektor elemű ún. hipervektor felhasználásával, az $\boldsymbol{r} \in E_m$ vektorral képzett „skaláris szorzat"-ként, vagyis

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathbf{A}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{r} \in E_m, \ \boldsymbol{b} \in L_n) \qquad \text{(D)}$$

módon is felírható egylrsz-ünk.

L. egylrsz-ünket *megoldani* annyit tesz, mint — ilyen vagy olyan módszerrel — megállapítani az egylrsz-t kielégítő összes $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vektorokat. E vektorhalmaz a (C) szerint a $\boldsymbol{b}$ vektort az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorok l. ko-ként meghatározó *összes együttható-m-eseket,* a (D) szerint pedig az $\mathbf{A}$ matrixú affin transzformációnál a $\boldsymbol{b}$ képvektorú *összes tárgyvektorokat* szolgáltatja.

Említsünk meg most *néhány elnevezést!* L. egylrsz-ünk. *inhomogén* jelzővel illetjük, ha található benne ismeretlent nem tartalmazó, állandó tag; ezeket az egylrsz jobb oldalára szokás rendezni (minden más tagot a bal oldalra),* tehát éppen a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \neq \boldsymbol{0}$ vektort határozzák meg. Ha viszont $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, akkor *homogén* l. egylrsz-ről beszélünk. Egy inhomogén l. egylrsz-ből tehát $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ helyettesítéssel kapjuk az ún. *hozzátartozó homogén* l. egylrsz-t.

A szóban forgó [(A)—(D) alakú] inhomogén l. egylrsz-hez tartozó *homogén l. egylrsz ún. transzponáltja* az

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{n1}\xi_n = 0 \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{n2}\xi_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1m}\xi_1 + a_{2m}\xi_2 + \ldots + a_{nm}\xi_n = 0 \end{array}\right\},$$

* Az (A)—(D) alakokat éppen e szokásnak megfelelően írtuk fel.

ill. — az újabb $\varrho = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $A^* = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ jelölések bevezetésével — az

$$a_j\varrho = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i a^i = 0; \quad A^*\varrho = 0$$

alakokban jelentkezik.

Megállapodás! A következő újabb rövidítéseket vezetjük be:

homogén .... h., inhomogén ....inh.,
reguláris .... reg., szinguláris ....szing.

2'. Térjünk át ezek után a *reg. l. egylrsz-ek* tanulmányozására! A regularitás fogalmát értelmezi a következő

definíció: *A* (C) *lineáris egyenletrendszert akkor mondjuk r e g u l á r i s nak, ha az* $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *vektorok száma* (m) *megegyezik dimenziószámukkal* (n), *továbbá e vektorok lineárisan függetlenek, vagyis az* L_n *lineáris tér egy* B_n *bázisát képezi; ellenkező esetben á l t a l á n o s vagy szinguláris jelzővel illetjük az egyenletrendszert.*

(Megjegyzendő, hogy az $m = n$ egyenlőség — az (A) alak szerint — az ismeretlenek és egyenletek számának egyenlőségét jelenti.)

A reg. l. egylrsz-ek *általános alakja* tehát

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = \sum_{i=1}^{n} x_ia_i = b \quad (a_i, b \in L_n; \{a_i\} = B_n). \quad \text{(E)}$$

Regularitás esetén a $(0 \neq b) \in L_n$ vektor nyilván egyértelműen állítható elő az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B_n \subset L_n$ bázisvektoroknak rendre $x_1, x_2, \ldots, n_n$ koordinátákkal képzett l. ko-jaként; ez utóbbiak egyszersmind az (E) vektoregyl egyértelmű $r = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ megoldásvektorát szolgáltatják. A $b = 0$ esetben — a bázisvektorok l. ftls-e folytán — csakis az $r = 0$ triviális megoldásvektor létezik. Kimondható tehát az alábbi

tétel: *Az* (E) *alakú r e g u l á r i s lineáris vektoregyenlet p o n t o s a n egy* r *megoldásvektorral rendelkezik, amelyet éppen a* b *zavaróvektornak a bázist képző* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *együtthatóvektorokra vonatkozó* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *koordinátái határoznak meg. Homogenitás* $(b = 0)$ *esetén ezért csupán a triviális (csupa zérus koordinátájú)* 0 *megoldásvektor létezik.*

1. Pl. Megoldandó az

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -7 \end{aligned}\right\}$$

reg. inh. l. egylrsz. — *Útmutatás:* használjuk ki az a_j együttható-(oszlop-) vektorok ortogonalitását (l. a V° 1'-beli 1. példát); így pl.

$$a_2(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4) = a_2^2x_2 = 6x_2 = a_2b = 2, \quad x_2 = 1/3;$$

hasonlóan $x_1 = -2/15, \quad x_3 = -7/5, \quad x_4 = -4.$

II°. ÁLTALÁNOS EGYENLETRENDSZEREK. 1'. Térjünk vissza most az I° 1'-bemutatott

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ma_m = \sum_{j=1}^{m} x_ja_j = b \quad (a_j, b \in L_n) \quad \text{(A)}$$

alakú, (tehát n db m ismeretlenes skaláris egyl-et magába foglaló) *általános* vagy szinguláris *l. vektoregyl*-re. Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ együtthatóvektorok tudvalevőleg az L_n tér valamely $L_n^{(r)}$ *alterét* generálják, ahol r e vektor-m-es l. ftl vektorainak a száma ($r \leqq n$), röviden a vektor-m-es és az l. egylrsz ún. *rangszáma*. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy éppen az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ *vektor-r-es l. ftl* s így az $L_n^{(r)}$ altér egy $B_n^{(r)}$ bázisát képezi, a többi $\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektor pedig e bázisvektorok

$$\boldsymbol{a}_{r+\mu} = \sum_{\varrho=1}^{r} \alpha_{\varrho, r+\mu} \boldsymbol{a}_\varrho \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m - r) \tag{B}$$

l. ko-jaként nyerhető.

2'. Ezek után a $\boldsymbol{b}$ zavarótag szempontjából a következő *két eset* lehetséges:

a) $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b} \notin L_n^{(r)}$: ekkor $\boldsymbol{b}$ nyilván nem állítható elő az $\boldsymbol{a}_\varrho \in B_n^{(r)}$ bázisvektorok l. koként, vagyis az (A) l. egylrsz-nek egyáltalán *nincs megoldása;*

b) $\boldsymbol{b} \in L_n^{(r)}$: ekkor $\boldsymbol{b}$ egyértelműen előállítható

$$\boldsymbol{b} = \sum_{\varrho=1}^{r} \beta_\varrho \boldsymbol{a}_\varrho \tag{C}$$

alakban, s mindjárt látni fogjuk, az (A)-nak ilyenkor *végtelen sok megoldása van.* A $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ esete nyilván mindig ide tartozik, lévén $\boldsymbol{0} \in L_m^{(r)}$.

A továbbiakban e *második esettel* foglalkozunk, amikor is az (A) vektoregyl

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_m\boldsymbol{a}_m = \sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b} \in L_n^{(r)}; B_n^{(r)} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}) \tag{D}$$

alakot ölt. Ez —a (B) és (C) felhasználásával — a következőképpen írható át:

$$\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{a}_j = \sum_{\varrho=1}^{r} x_\varrho \boldsymbol{a}_\varrho + \sum_{\mu=1}^{m-r} x_{r+\mu} \boldsymbol{a}_{r+\mu} = \sum_{\varrho=1}^{r} \left(x_\varrho + \sum_{\mu=1}^{m-r} \alpha_{\varrho, \mu+r} x_{r+\mu} \right) \boldsymbol{a}_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} \beta_\varrho \boldsymbol{a}_\varrho .$$

Eszerint a $\boldsymbol{b}$ vektornak az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektor-m-esre vonatkozó x_j és az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ vektor-r-esre vonatkozó β_ϱ koordinátái között a

$$\beta_\varrho = x_\varrho + \sum_{\mu=1}^{m-r} \alpha_{\varrho, \mu+r} x_{r+\mu} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

összefüggés áll fenn, amelyben az utolsó $m - r$ db $x_{r+\mu}$ ismeretlen — láthatóan — tetszőleges értékű, ún. szabad paraméterként ($x_{r+\mu} = t_\mu$) szerepel. A (D) l. vektoregyl R megoldásvektor-halmazának általános eleme ily módon

$$x_\varrho = \beta_\varrho - \sum_{\mu=1}^{m-r} \alpha_{\varrho, r+\mu} \cdot t_\mu, \qquad x_{r+\nu} = t_\nu = \delta_{r+\nu, r} + \sum_{\mu=1}^{m-r} \delta_{\mu\nu} \cdot t_\mu$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r; \quad \nu = 1, 2, \ldots, m - r)$$

koordinátás, ill.

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{b}} - \sum_{\mu=1}^{m-r} t_\mu \hat{\boldsymbol{a}}_{r+\mu} = \hat{\boldsymbol{b}} + \varrho = (x_1, x_2, \ldots, x_r; \ x_{r+1}, \ldots, x_m) =$$

$$= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r; \underbrace{0}_{r+1}, \ldots, \underbrace{0}_{m}) - \sum_{\mu=1}^{m-r} t_\mu(\alpha_{1, r+\mu}, \ldots, \alpha_{r, r+\mu}; \underbrace{0}_{r+\mu}, \ldots, \underbrace{-1}_{r+\mu}, \ldots, \underbrace{0}_{m})$$

vektoros alakban jelentkezik. A $t_\mu = \delta_{\mu\nu}$ választással nyilván az

$$\boldsymbol{r}_\nu = \hat{\boldsymbol{b}} - \hat{\boldsymbol{a}}_{r+\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m-r)$$

partikuláris megoldásvektorhoz jutunk; ezek egyébként az R halmaz egy ún. alaprsz-ét, továbbá — szerkezetükből nyilvánvalóan — az L_m téregy $L_m^{(m-r)} = \{\varrho\}$ alterének $B_m^{(m-r)}$ generálóbázisát képezik. Ha a (D) vektoregyl. hom., azaz [a $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \subset L_n$ bázisra nézve] $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \boldsymbol{0}$, akkor a fenti formulákban nyilván [egy $B'_n = \{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r; \boldsymbol{e}'_{r+1} \ldots, \boldsymbol{e}'_m\} \subset L_m$ bázisra nézve is]*

$$\hat{\boldsymbol{b}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r; 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = \boldsymbol{0}.$$

Vizsgálatunk eredményét foglalja össze az alábbi

tétel: *Az* (A) *alakú általános vagy* s z i n g u l á r i s *lineáris vektoregyenletnek az* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *együtthatóvektorokkal generált* $L_n^{(r)}$ *altér és a* $\boldsymbol{b}$ *zavaróvektor viszonyától függően*

a) *a* $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{b} \notin L_n^{(r)}$ *esetben egyáltalán* n i n c s *megoldásvektora;*

b) *a* $\boldsymbol{b} \in L_n^{(r)}$ *esetben pedig* v é g t e l e n s o k $\boldsymbol{r}$ *megoldásvektora van, s ezek a* $\hat{\boldsymbol{b}}$ *vektornak és az* $\hat{\boldsymbol{a}}_{r+1}, \hat{\boldsymbol{a}}_{r+2}, \ldots, \hat{\boldsymbol{a}}_m$ *vektorokkal (és a* $-t_1, -t_2, \ldots, t_{m-r}$ *szabad paraméterekkel) generált* $L_m^{(m-r)}$ *altér* ϱ *vektorainak összegeként jelentkeznek; a homogenitás esete mindig ide tartozik* ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \in L_m^{(r)}$).

3'. Megjegyzendő, hogy *regularitás* ($r = m = n$) esetén $L_m^{(r)} \equiv L_m$ s így $\boldsymbol{b} \in L_m^{(r)}$, tehát van megoldás, mégpedig $m - r = 0$ paraméteres, vagyis egyértelműen meghatározott, összhangban az I°-ban tanultakkal. Ugyancsak egyértelmű megoldás létezik az $r = m < n$ esetben is, hacsak $\boldsymbol{b} \in L_n^{(r)}$. Ezzel szemben az $m > n$ esetben már végtelen sok megoldás adódik, hacsak $\boldsymbol{b} \in L_n^{(r)}$, mert — a mindig igaz $r \leqq n$ egyenlőtlenség folytán — ilyenkor $m - r \geqq m \dot{-} n > 0$.

1. Pl. Megoldandó az

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_5\boldsymbol{a}_5 + x_6\boldsymbol{a}_6 = \boldsymbol{b}$$

inh. l. vektoregyl, ahol

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 2, 4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-2, -1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (3, -4, -1, 2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (0, 1, -2, 1),$$
$$\boldsymbol{a}_5 = 3\boldsymbol{a}_1 - 5\boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{a}_6 = 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4, \quad \boldsymbol{b} = (-5, 1, 9, -7).$$

— *Útmutatás:* használjuk fel az I° 2'-beli 1. példa megoldását; az általános megoldás:

$$x_1 = -\frac{2}{15} - 3t_1, \quad x_2 = \frac{1}{3} - 2t_2, \quad x_3 = -\frac{7}{5} + 5t_1, \quad x_4 = -4 - t_2,$$
$$x_5 = t_1, \quad x_6 = t_2.$$

2. Pl. Megoldandó:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

* L. bővebben a III° 1'-ben.

— *Útmutatás:* $a_3 = -\frac{1}{11}a_1 + \frac{5}{11}a_2$, $a_4 = \frac{9}{11}a_1 - \frac{1}{11}a_2$; az általános megoldás: $x_1 = \frac{1}{11}(-2 + t_1 - 9t_2)$, $x_2 = \frac{1}{11}(10 - 5t_1 + t_2)$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$; egy partikuláris megoldás ($t_1 = 0$, $t_2 = 1$): $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

3. **Pl.** Megoldandó:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

— *Útmutatás:* az egylrsz-nek nincs megoldása.

**III°. A MEGOLDÁS FELTÉTELE, SZERKEZETE.* 1'. Próbáljuk más, *alkalmasabb alakban* megadni a II° (A) alakú általános 1. vektoregyenlet *megoldhatóságának fentebb nyert $b \in L_n^{(r)}$ feltételét.* Evégből transzformáljuk a $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in L_n$, $a_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}) \in L_n^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ vektorokat a $B_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ bázisról egy, a $B_n^{(r)} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ altérbázisból alkalmas kiegészítéssel nyert, új $B_n' = (a_1, a_2, \ldots, a_r; e_{r+1}', \ldots, e_n') = (e_1', e_2', \ldots, e_r', e_{r+1}', \ldots, e_n')$ bázisra. Az *a)* *α)* VI°-ban tanultak értelmében a B_n'-re vonatkozó *új koordináták*

$$b_i'(= \beta_i) = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_{il}' \cdot b_l, \qquad a_{ij}'(= \alpha_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_{il}' a_{lj}$$

$$\left(e_l = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{il}' e_i'; \quad l, i = 1, 2 \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, m\right)$$

alakot öltenek.

Minthogy a b vektor a megoldhatóság kedvéért, az a_j vektorok pedig a feltevés szerint az $L_n^{(r)} = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_r a_r\}$ altérhez tartoznak, *kell, hogy utolsó, $n - r$ új koordinátájuk zérus legyen,* azaz

$$b_{r+\nu}' = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_{r+\nu,l}' b_l = (\varepsilon_{r+\nu,1}', \varepsilon_{r+\nu,2}', \ldots, \varepsilon_{r+\nu,n}')(b_1, \ldots, b_2, b_n) = e^{r+\nu} b = 0, \qquad \text{(M)}$$

$$a_{r+\nu,j}' = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_{r+\nu,l}' a_{lj} = (\varepsilon_{r+\nu,1}', \varepsilon_{r+\nu,2}', \ldots, \varepsilon_{r+\nu,n}')(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) = e^{r+\nu} a_j = 0,$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n - r; \ j = 1, 2, \ldots, m),$$

ahol a skaláris szorzás felhasználásával már áttértünk az E_n eu. térre. Egyl-eink azt mutatják, hogy a $b \in L_n^{(r)}$ *vektor ortogonális az* $e^{r+1}, e^{r+2}, \ldots, e^n$ *vektorokra, amelyek egyébként partikuláris megoldásvektorai* a II° (A) inh. egylrsz-hez tartozó

$$a_{1j}\xi_1 + a_{2j}\xi_2 + \ldots + a_{nj}\xi_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) = q a_j = 0 \qquad \text{(T)}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

transzponált h. l. egylrsz-nek. Ezen $e^{r+\nu}$ vektorok 1. ftl-ek is, mert nem csupa zérus α_ν-k esetén

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} \alpha_\nu e^{r+\nu} = \sum_{\nu-1}^{n-r} \alpha_\nu \left(\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_{r+\nu,l}' e_l'\right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n-r} \alpha_\nu \varepsilon_{r+\nu,l}'\right) e_l' = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l e_l' \neq 0,$$

legalább egy $\gamma_l \neq 0$ miatt $[e_l = (\varepsilon_{1l}', \ldots, \varepsilon_{rl}', \varepsilon_{r+1,l}', \ldots, \varepsilon_{nl}) \in B_n]$.

2'. A (T) transzponált h. l. egylrsz *összes megoldásvektora* $E_n^{(v')} = \{q\}$ *alterének dimenziószáma* nyilván $v' = n - r'$, ahol r' a (T) egylrsz rangszáma (vagyis az $a^1, a^2, \ldots, a^n$ vektorrsz l. ftl vektorainak a száma). A (T) előbb említett $e^{r+1}, e^{r+2}, \ldots, e^n$ l. ftl partikuláris megoldásainak a számára nézve írható tehát, hogy

$$n - r \leqq n - r', \quad \text{vagyis} \quad r \leqq r'.$$

A (T) transzponáltjára, vagyis az eredeti h. l. egylrsz-re vonatkozólag ez az egyenlőtlenség nyilván

$$r' \leqq r'' = r$$

alakot ölt. Következésképpen $r = r'$ és így $n - r' = n - r$. Igaz tehát az alábbi

tétel: *Bármely homogén lineáris egyenletrendszer és a hozzá tartozó transzponált egyenletrendszer m e g e g y e z ő r a n g s z á m ú, azaz*

$$r = \varrho(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \varrho(\mathrm{A}) = \varrho(a^1, a^2, \ldots, a^n) = \varrho(\mathrm{A}^*) = r'. \qquad \text{(R)}$$

Az előzők értelmében az $e^{r+1}, e^{r+2}, \ldots, e^n$ vektor-$(n - r)$-es a (T) egylrsz $E_n^{(n-r)} = \{q\}$ megoldásalterének egy $B_n^{(n-r)}$ *bázisát* képezi, és így az (M) alatti $b \perp e^{r+\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n - r$) ortogonalitási relációkból a $b \perp B^{(n-r)}$ bázisortogonalitás, ebből pedig — az V° 2' szerint — a $b \perp E_n^{(n-r)}$ *altér-ortogonalitás* adódik b részére.

Az 1'—2'-beli vizsgálat alapján — a II° (A) l. inh. egylrsz megoldhatóságának feltételeként — kimondható az alábbi

tétel: *Az általános inhomogén lineáris vektoregyenletnek csak akkor létezik megoldásvektora, ha a* b *zavaróvektor o r t o g o n á l i s a transzponált homogén vektoregyenlet* $E_n^{(n-r)} = \{q\}$ *megoldásalterére.*

3'. Vegyük szemügyre ezek után *az összetartozó*

$$\sum_{j=1}^{m} x_j a_j = b \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_j = 0 \qquad \text{(I, H)}$$

inh. és h. l. vektoregyl megoldásalterének kapcsolatát. A II° 2'-ben tanult általános megoldásformula a szabad paramétereket $t_\mu = t_{0\mu} + \tau_\mu$ ($t_{0\mu} = \text{const}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m - r$) szerinti kialakításával a még általánosabb

$$r = \left(\hat{b} - \sum_{\mu=1}^{m-r} t_{0\mu}\hat{a}_{r+\mu}\right) - \sum_{\mu=1}^{m-r} \tau_\mu \hat{a}_{r+\mu} = r_0 + \varrho \qquad [r_0 = \mathbf{const}, \ \varrho = \varrho(\tau_\mu)]$$

alakot ölti, ahol nyilván r_0 az inh. egyl egy tetszőleges, ϱ pedig a hozzá tartozó h. egyl általános megoldásvektora. Így adódik az alábbi

tétel: *Az* (I) *inhomogén lineáris vektoregyenlet* $r = (x_j)$ *általános megoldásvektora egy tetszőleges* $r_0 = (x_{0j})$ *partikuláris megoldásvektorának és a hozzá tartozó* (H) *homogén vektoregyenlet* $\varrho = [\xi_j(\tau_\mu)]$ *általános megoldásvektorának ö s s z e g e k é n t állítható elő.*

Más szóval az (I) egyl (partikuláris) és a (H) egyl (általános) megoldása — az (I) egyl (általános) megoldásának előállítása céljából — *egymásra „szuperponálható"*.

IV°. AZ n-EDRENDŰ DETERMINÁNSOKRÓL. 1'. E helyen nem foglalkozhatunk az n-edrendű determinánsok elméletének részletes kifejtésével,* hanem csupán *a definíció és néhány fontosabb következmény, tétel felsorolására* kell szorítkoznunk, majd felhasználnunk ezeket a l. egylrsz-ek további vizsgálatánál.

* L. pl. *Lichnerowicz* [1], *Fazekas* [14].

Az $E_2 = \{\boldsymbol{r}\} = \{\overrightarrow{OP}\}$ eu. sík $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \in E_2$ vektorpárja, egy $B_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2; \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j - \delta_{ij}\}$ ortonormált bázisa és egy $\alpha \in K_v$ valós szám segítségével a

$$(K_v \in) D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = -D(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1), \quad D(\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \alpha D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2),$$

$$D(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{a}_2) = D(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) + D(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{a}_2), \quad D(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) = 1$$

szerint szemléletesen értelmezett *algebrai (paralelogram-) terület, ún. másodrendű determináns* fogalmát általánosítja az alábbi

definíció: *n-edrendű determinánsnak nevezzük, és* $D = D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ *módon jelöljük mindazokat az* $E_n = \{\boldsymbol{r}, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots\}$ *valós euklidesi* (vagy akár a komplex E_n euklidesi, ill. H_n hermitei) *térben, egy* $B_n = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *ortonormált bázisnak* $\overset{(z)}{\textit{igénybevételével}}$ *értelmezett skalár-vektor-n-es függvényeket, amelyek eleget tesznek a következő 4 feltételnek (axiómának):*

a) $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$
[felcserélési feltétel];

b) $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{c}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$
[additív feltétel];

c) $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \quad (\alpha \in K_v)$
[multiplikatív feltétel];

d) $D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1 \quad (\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij})$ [bázisfeltétel].

Bizonyítani lehet az ilyen függvények egzisztenciáját és unicitását*.

Következmények:

ad b) $$D(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots) = D\left(\ldots, \sum_{\lambda_i=1}^{n} \boldsymbol{b}_{i\lambda_i}, \ldots\right) =$$

$$= \sum_{\lambda_1=1}^{n} \sum_{\lambda_2=1}^{n} \cdots \sum_{\lambda_n=1}^{n} D(\ldots, \boldsymbol{b}_{i\lambda_i}, \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ad c) $D(\ldots, \alpha_i\boldsymbol{a}_i, \ldots) = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \cdot D(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

2′. Főbb determináns tételek:

1. tétel: *Ha a D determináns valamelyik* $\boldsymbol{a}_i$ *vektora* $\boldsymbol{0}$ *zérusvektor, akkor* $D = 0$. — [Vö. a c)-vel $\alpha = 0$ esetén.]

2. tétel: *Ha a D valamelyik* $\boldsymbol{a}_i$ *és* $\boldsymbol{a}_j$ *vektora megegyezik, akkor szintén* $D = 0$. — [Vö. az a)-val, $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ esetén.]

3. tétel: *A D értéke nem változik, ha valamelyik* $\boldsymbol{a}_i$ *vektorához hozzáadjuk a többi* $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ *vektornak egy tetszőleges lineáris kombinációját.* — [Vö. az ad b)-vel, ad c)-vel és a 2. tétellel.]

4. tétel: *Ha a D determináns* $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *vektorai lineárisan függenek, akkor* $D = 0$. — [Vö. az 1. és 3. tétellel és a 1. fs $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}_i - \sum_{k \neq i} \alpha_k\boldsymbol{a}_k$ írásmódjával.]

5. tétel: *Az* $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *vektor-n-es akkor és csakis akkor lineárisan független, ha determinánsuk,* $D \neq 0$. — [Vö.: ad b), ad c), 2. tétel, a), d)].

---

* L. pl. *Lichnerowicz* [1].

3'. Determinánskifejtési t é t e l e k:*

I. (Unicitási) ***tétel:*** *Ha egyáltalán létezik az* a)—d) *feltételt kielégítő* $D = D(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots)$ $[\boldsymbol{a}_j = (\ldots, a_{ij}, \ldots); j = 1, 2, \ldots, n]$ *függvény, akkor az csakis*

$$D = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \cdot a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

a l a k ú lehet, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_n$ egy (az $1, 2, \ldots, n$ természetes számokból tetszőlegesen nyert) indexsorozat, amelyben i_l a tőle jobbra levő indexekkel I_l számú (nagyságrendi) *előzést* képez, és $I = I(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum_{l=1}^{n} I_l$. (Ez a D-nek tetszőleges elemei szerinti kifejtése.)

II. (Egzisztencia-) ***tétel:*** *Az előbbi* $D = D(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \ldots, a_{i_n n})$ *függvény valóban k i e l é g í t i az* a)—d) *feltételeket.*

III—IV. tétel: ***A D determinánsnak*** (az $\boldsymbol{a}_j$ vektora $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ elemeivel való vagy röviden) *a j-edik o s z l o p a s z e r i n t i k i f e j t é s e*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij} = \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{\Delta}_j$$

alakban történik, ahol

$$\Delta_{ij} = \sum_{i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_1, \ldots, i_{j-1}, i, i_{j+1}, \ldots, i_n} \cdot a_{i_1 1} \ldots, a_{i_{j-1} j-1} \cdot a_{i_{j+1} j+1} \ldots, a_{i_n n} =$$

$$= D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (-1)^{i+j} \cdot D(\boldsymbol{a}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}^{(i)}, \boldsymbol{a}_{j+1}^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{(i)}) =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, a_{1,j-1}, & a_{1,j+1}, & \ldots, a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1}, & \ldots, a_{i-1,j-1}, & a_{i-1,j+1}, & \ldots, a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, a_{i+1,j-1}, & a_{i+1,j+1}, & \ldots, a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & \ldots, a_{n,j-1}, & a_{n,j+1}, & \ldots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

a $D = \det(a_{ij})$ determinánsnak az a_{ij} eleméhez tartozó $(n - 1)$-edrendű, ún. *előjeles v. komplementer aldeterminánsa* és $\boldsymbol{\Delta}_j$ (az $\boldsymbol{a}_j$ vektor $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ elemeihez tartozó $\Delta_{1j}, \Delta_{2j}, \ldots, \Delta_{nj}$ elemekből képzett) ún. komplementer aldeterminánsvektor.

V. tétel: *A D determináns valamely* $\boldsymbol{a}_j$ *(oszlop-)vektorának egy m á s i k* $\boldsymbol{a}_k$ *(oszlop-)vektorához* $(j \neq k)$ *tartozó* $\boldsymbol{\Delta}_k$ *komplementer aldetermináns-vektorával való skaláris (belső) szorzata zérus, azaz*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ik} = \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{\Delta}_k = 0 \quad (j \neq k = 1, 2, \ldots, n).$$

Az utóbbi tételeket foglalja össze az alábbi általános kifejtési

tétel: *A D determináns valamely* $\boldsymbol{a}_j$ *(oszlop-)vektorának egy t e t s z ő l e g e s* $\boldsymbol{a}_k$ *(oszlop-)vektorához tartozó* $\boldsymbol{\Delta}_k$ *komplementer aldetermináns-vektorral képzett skaláris*

* Ezek már igazolási útbaigazítások nélkül szerepelnek.

(belső) szorzata így alakul:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\Delta_{ik} = \boldsymbol{a}_j\,\Delta_k = \delta_{jk}\cdot D.$$

Ebből következik, hogy *az* $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *vektor-n-es és a* $\boldsymbol{d}_k = \Delta_k/D$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *vektor-n-es egymásnak ún. r e c i p r o k a,* azaz

$$\frac{1}{D}\sum a_{ij}\,\Delta_{ik} = \boldsymbol{a}_j\boldsymbol{d}_k = \delta_{jk}.$$

VI. (Dualitási) ***tétel:*** *A* $D = D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |a_{ij}|$ *determináns értéke nem változik, ha számtáblázatát (matrixát) az* $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *elemekkel képzett) főátlón át t ü k r ö z z ü k, vagyis áttérünk a* $D^* = (\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n) = |a_{ji}|$ *ún. duáldeterminánsra,* azaz

$$D = D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= D(\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n) = D^*.$$

V°. MEGOLDÁS DETERMINÁNSOKKAL. 1'. A determinánsokkal kapcsolatos alapismeretek birtokában térjünk vissza most az l. egylrsz-ek vizsgálatára! Beszéljünk először a

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b} \qquad [\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b} \in E_n,\ \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} = B_n] \qquad \text{(A)}$$

alakú *reg. inh.* (***b*** $= \boldsymbol{0}$ *esetén h.) l. vektoregyl-ről!* Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ vektorrsz l. ftls-e következtében — a *IV°* 2'-beli 5. tétel szerint — a

$$D = D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \neq 0.$$

Kíséreljük meg *explicite előállítani* az (A) egyl-nek — az *I°* 2' értelmében egyértelműen meghatározott — megoldásvektorát. E célból az (A) mindkét oldalát megszorozva az $\boldsymbol{a}_k$ (oszlop-)vektorhoz tartozó Δ_k komplementer aldetermináns-vektorral és a IV° 3'-beli általános kifejtési tételt alkalmazva, a

$$\Delta_k \cdot \sum x_j\boldsymbol{a}_j = \sum x_j(\boldsymbol{a}_j\,\Delta_k) = x_k(\boldsymbol{a}_k\,\Delta_k) = x_kD = \boldsymbol{b}\,\Delta_k = B_k$$

bővített egylrsz-hez jutunk. Az (A) egyértelmű $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ megoldásvektora nyilván kielégíti ezt, sőt x_k koordinátái egyenként rögtön nyerhetők belőle, mégpedig

$$x_k = \frac{B_k}{D} = \frac{\boldsymbol{b}\Delta_k}{\boldsymbol{a}_k\Delta_k} = \frac{D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)}{D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ D \neq 0) \qquad \text{(C)}$$

módon. A keresett *megoldásvektor* tehát így alakul:

$$\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \frac{1}{D}\cdot(B_1, \ldots, B_k, \ldots, B_n) = \frac{1}{D}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' \qquad (D \neq 0).$$

Homogénitás ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$) esetén nyilván valamennyi $x_k = B_k/D = (\boldsymbol{b}\Delta_k)/D = 0$, s így $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Ezzel igazolást nyert a nevezetes

Cramer-szabály: *Az* (A) *reguláris lineáris vektoregyenlet egyértelmű* $\boldsymbol{r}$ *megoldásvektorának* x_k *koordinátáját — a* (C) formula szerint — a $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ és a $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \neq 0$ *determináns hányadosa szolgáltatja.*

2'. Kíséreljük meg ezután determinánsok segítségével a

$$\sum_{j=0}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b} \qquad [\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b} \in L_n,\ \varrho(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = r \leqq n] \tag{L}$$

általános l. vektoregyl rangszámát, majd explicit megoldását meghatározni.

A $\varrho(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = r$ *rangszám* értelmében az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vektorok közt r (és nem több) l. ftl vektor található. Ezek — az $\boldsymbol{a}_j$ vektorok (ill. az x_j ismeretlenek) alkalmas *átindexelésével* — az első r helyre hozhatók, $\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \ldots, \boldsymbol{a}_r' \in L_n$ módon. E l. ftl (oszlop-)vektor-r-essel együtt a belőle képzett $\boldsymbol{a}^{1'}, \boldsymbol{a}^{2'}, \ldots, \boldsymbol{a}^{n'} \in L_r$ (sor-)vektor-n-es is r-edrangú, tekintettel az eredeti és transzponált h. l. egylrsz (vagyis az $\boldsymbol{a}_j$ oszlop és az $\boldsymbol{a}^i$ sorvektorrsz) III° 2'-ben megismert egyenlőrangúságára. Az előbbi (sor-) vektor-n-esnek nyilván r számú l. ftl vektora (ill. a megfelelő egyenletek) — *újabb átindexeléssel* — szintén az első r helyre hozhatók $\boldsymbol{a}^{1''}, \boldsymbol{a}^{2''}, \ldots, \boldsymbol{a}^{r''}$ módon. Az 5. és a VI. tételek értelmében, e l. ftl vektor-r-es D_r^* determinánsa, *az egylrsz ún. fődeterminánsa (és duálja) zérustól különböző*, azaz

$$D_r^* = D(\boldsymbol{a}^{1''}, \boldsymbol{a}^{2''}, \ldots, \boldsymbol{a}^{r''}) = D(\boldsymbol{a}_1'', \boldsymbol{a}_2'', \ldots, \boldsymbol{a}_r'') = D_r \neq 0.$$

A fődeterminánsnak megfelelő (skaláris) ismeretleneket, ill. egyenleteket *főismeretleneknek*, ill. *főegyenleteknek* nevezzük.

Az ismeretlenek (ill. oszlopvektorok) és az egyenletek (ill. sorvektorok) említett átindexelésének eredményeként az r-edrangú l. egylrsz a_{ij} együtthatóinak n soros és m oszlopos $[a_{ij}]$ táblázatában, az egylrsz ún. *együtthatómatrixában a* $D_r^* \neq 0$ *fődeterminánс matrixa* az első r sor és oszlop közös elemeiként *a bal felső sarokba* rendeződik.

3'. Térjünk át most az (L) r-edrangú általános l. vektoregyl *explicit megoldására*, feltételezve (de a továbbiakban vesszőzéssel már nem jelezve) a vázolt átrendezés előzetes végrehajtását. Egylrsz-ünknek az első r (fő-) egyl-ből álló és az első r (fő-) ismeretlent a bal oldalon tartalmazó ún. *főrésze*, vagyis a

$$\sum_{\varrho=1}^{r} x_\varrho' \boldsymbol{a}_\varrho = \boldsymbol{b} - \sum_{\mu=1}^{m-r} t_\mu' \boldsymbol{a}_{r+\mu} \qquad (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b} \in L_r) \tag{F}$$

vektoregyl az $x_1', \ldots, x_\varrho', \ldots, x_r'$ főismeretlenre nézve *regulárisnak* tekinthető, lévén a fődeterminánс, $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\varrho, \ldots, \boldsymbol{a}_r) = D_r^* \neq 0$. Az (átrendezett) teljes (L) egyl egy $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m)$ partikuláris megoldása nyilván az (F) főrésznek is *megoldása* [hiszen az $\hat{\boldsymbol{r}}$ vektor $\hat{x}_j$ koordinátái — az (L) összes, n skaláris egyl-e között — az (F)-be foglalt r főegyl-et is kielégítik]. Az (L) egyl $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m)$ általános megoldása egyszersmind az (F) főrész $\boldsymbol{r}' = (x_1', \ldots, x_r'; t_1', \ldots, t_{m-1}')$ általános megoldását is *felöleli*, mert az előbbi [ ]-es megjegyzés, valamint a II° 2'-ben tanultak értelmében a megfelelő h. l. vektoregyl-ek $E_m^{(m-r)} = \{\boldsymbol{r} - \hat{\boldsymbol{r}}\}$, ill. $E_m'^{(m-r)} = \{\boldsymbol{r}' - \hat{\boldsymbol{r}}\}$ megoldásaltere közül az első valamilyen altere lenne a másodiknak, ha a dimenzióegyezés miatt nem kellene az $E_m^{(m-r)} = E_m'^{(m-r)}$ körülménynek fennállnia. Ebből — a közös $\hat{\boldsymbol{r}}$ vektor szuperponálásával — az $\{\boldsymbol{r}\} = \{\boldsymbol{r}'\}$ tény következik. Igaz tehát az alábbi

tétel: *Ha az* (L) *általános lineáris egyenletrendszer egyáltalán megoldható, akkor megoldása azonos az* (F) *f ő r é s z é vel.*

Ezek után az (F) főrész és egyszersmind *a teljes* (L) *egyl explicit megoldása* — az 1'-ben tanult *Cramer*-szabály értelemszerű alkalmazásával — így alakul:

$$x_k = \frac{D_k^{(r)}}{D_r} = \frac{\Delta_k^{(r)}\left(\boldsymbol{b} - \sum_\mu t_\mu \boldsymbol{a}_{r+\mu}\right)}{\Delta^{(r)}\boldsymbol{a}_k} = \frac{1}{D_r}\left[(\Delta_k^{(r)}\boldsymbol{b}) - \sum_{\mu=1}^{m-r} t_\mu(\Delta_k^{(r)}\boldsymbol{a}_{r+\mu})\right]$$

$$x_{r+\mu} = t_\mu \qquad (D_r \neq 0;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}, \Delta_k \in E_n^{(r)}),$$

ahol $\Delta_k^{(r)}$ a D_r fődetermináns $\boldsymbol{a}_k$ (oszlop-)vektorához tartozó komplementer aldetermináns-vektor.

4'. Amint a III° 1'-ből tudjuk, az (L) általános l. vektoregyl *megoldhatóságának* (szükséges és elégséges) feltétele az, hogy

$$\boldsymbol{b} \in L_n^{(r)} = \{\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m\} \subset L_n \qquad (\alpha_i \in K_v)$$

legyen. Ebből kiindulva könnyen belátható* az alábbi

tétel: *Az* (L) *egyenlet megoldhatóságának újabb (szükséges és elégséges) feltétele az, hogy az*

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \quad \text{és az} \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$$

két függvényrendszer e g y e n l ő r a n g ú legyen.

Explicit feltételt ad a megoldhatóságra — az (L) egyl 2' szerinti átrendezése után nyert (de nem vesszőzött) l. f $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b} \in L_n$ (oszlop-) vektorrsz, ill. a megfelelő, s ugyancsak l. f $\boldsymbol{a}_b^1, \boldsymbol{a}_b^2, \ldots, \boldsymbol{a}_b^r, \boldsymbol{a}_b^{r+\nu} \in L_{r+1}$ (sor-)vektor-n-es alapján — az alábbi, egyszerűen igazolható*

tétel: *Az* (L) *egyenlet megoldhatóságának (szükséges és elégséges) explicit feltétele az, hogy a*

$$C_\nu = D(\boldsymbol{a}_b^1, \boldsymbol{a}_b^2, \ldots, \boldsymbol{a}_b^r, \boldsymbol{a}_b^{r+\nu}) = D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{r+\nu,1} & \ldots & a_{r+\nu,r} & b_{r+\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-r)$$

alakú, (r + 1)-edrendű ún. ***k a r a k t e r i s z t i k u s d e t e r m i n á n s o k*** *mind zérussal legyenek egyenlők.*

A C_ν determinánsok $(r+1)$-edik oszlopának elemeihez tartozó $\Gamma_1^\nu, \ldots, \Gamma_\varrho^\nu, \ldots, \Gamma_r^\nu, D_r$ komplementer aldeterminánsokkal és belőlük képzett

$$\boldsymbol{c}_\nu = (\Gamma_1^\nu, \ldots, \Gamma_\varrho^\nu, \ldots, \Gamma_r^\nu; 0, \ldots, \underbrace{D_r}_{r+\nu}, \ldots, 0) \in E_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-r)$$

vektorokkal a következő *ortogonalitási relációk* nyerhetők:

$$\boldsymbol{c}_\nu\boldsymbol{b} = \sum_{\varrho=1}^{r} \Gamma_\varrho^\nu b_\varrho + D_r b_{r+\nu} = D(\boldsymbol{a}_1^\nu, \boldsymbol{a}_2^\nu, \ldots, \boldsymbol{a}_r^\nu, \boldsymbol{b}^\nu) = C_\nu = 0,$$

$$\boldsymbol{c}_\nu\boldsymbol{a}_l = \sum_{\varrho=1}^{r} \Gamma_\varrho^\nu a_{\varrho l} + D_r a_{r+\nu,l} = D(\boldsymbol{a}_1^\nu, \boldsymbol{a}_2^\nu, \ldots, \boldsymbol{a}_r^\nu, \boldsymbol{a}_l^\nu) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r).$$

E l. ftl $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ vektorrsz az E_n tér egy $E_n^{(n-r)}$ alterét generálja, amelyre *a* $\boldsymbol{b} \in E_n$ *vektor ortogonális*, s amely láthatóan *az* (L) *egyl-hez tartozó h. egyl (főrészének) megoldásaltere*, összhangban a III° 1'-vel ($\boldsymbol{c}_\nu \equiv \boldsymbol{e}^{r+\nu}$).

* Bővebben l. pl. *Lichnerowicz* [1].

Oldjuk meg *determinánsokkal* az alábbi l. egylrsz-eket:

1. pl.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \quad &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - \quad - x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -7 \end{aligned}\right\}$$

[*Megoldás:* $x_1 = \frac{2}{15}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{7}{5}$, $x_4 = -4$.]

2. pl.

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 18 \end{aligned}\right\}$$

[*Megoldás:* $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 1$.]

3. pl.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

[*Megoldás:* $x_1 = \frac{1}{7}(-6 + 8t_1)$,

$x_2 = \frac{1}{7}(1 - 13t_1)$,

$x_3 = \frac{1}{7}(15 - 6t_1)$,

$x_4 = t_1$.]

4. pl.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

[*Megoldás:* $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$,
$x_3 = -1 - 8t_1 + 4t_2$
$x_4 = 0$,
$x_5 = 1 + 4t_1 - 2t_2$.]

5. pl.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

[*Megoldás:* nincs.]

6. pl.

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

[*Megoldás:* $\lambda \neq 0$ esetén nincs; $\lambda = 0$ esetén pedig

$x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 5t_1 - 13t_2)$,

$x_2 = \frac{1}{2}(-7 - 7t_1 - 19t_2)$,

$x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$.]

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

az 1—4. §-hoz

1. *Я. С. Дубнов:* Основы векторного исчисления 1. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
2. *В. П. Минорчкий и В. П. Улановский:* Векторная алгебра. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
3. *H. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár, I. rész; fordítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
4. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan, 2. kiadás; Budapest, 1942.
5. *A. Föppl:* Vorlesungen über technische Mechanik, 13. Aufl., München u. Berlin, 1943.
6. *A. Tenot:* Mécanique appliquée des systémes matériels rigides et des systèmes déformables; Dunod, Párizs, 1946.
7. *Dr. F. Neiss:* Determinanten und Martizen; III., verbesserte Aufl.; Springer-Verlag, Berlin (Göttingen), Heidelberg, 1948.

a függelékhez

1. *Lichnerowicz:* Lineare Algebra und lineare Analysis. (Ford. franciából.) — Deutsch. Verl. d. Wissensch., Berlin, 1956.
2. *I. M. Gelfand:* Előadások a lineáris algebráról. (Ford. oroszból.) — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
3. *G. E. Silov:* Vvedenie v teoriju linejnüch prosztransztv. — GITTL, Moszkva, 1952.
4. *F. Lagally—W. Franz:* Vorlesung über Vektorrechung (6. Aufl.) — Akad. Verlag, Leipzig, 1959.
5. *F. Ollendorf:* Die Welt der Vektoren. — Springer, Wien, 1950.
6. *Rédei László:* Algebra, I. k. — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1944.
7. *Szőkefalvi-Nagy Béla:* Valós függvények és függvénysorok. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
8. *Szele Tibor:* Bevezetés az algebrába. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
9. *M. K. Grebencsa—Sz. I. Novoszjolov:* Matematikai analízis, I—II. k. (Ford. oroszból.) — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
10. *A. Sommerfeld:* Parzielle Differentialgleichungen (Aufl.) — Akad. Verlag. Leipzig.
11. *Krekó Béla:* Lineáris programozás. — Közgazd. és Jogi Kiadó, 1962.
12. *S. J. Gass:* Linear Programming (Methods and Applications). — Mc. Graw-Hill, New York, 1958.
13. *Fazekas Ferenc:* Komplex függvénytan. (Műsz. Mat. Gyak. B. IV.) — Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
14. *Fazekas Ferenc:* Lineáris algebra A/I. — Szakmérnöki jegyzet, Mérnöki Továbbképző Intézet, 1961.
15. *Fazekas Ferenc:* Matematikai programozás. (Műsz. Mat. Gyak. C. VII.) — Második bővített kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.